

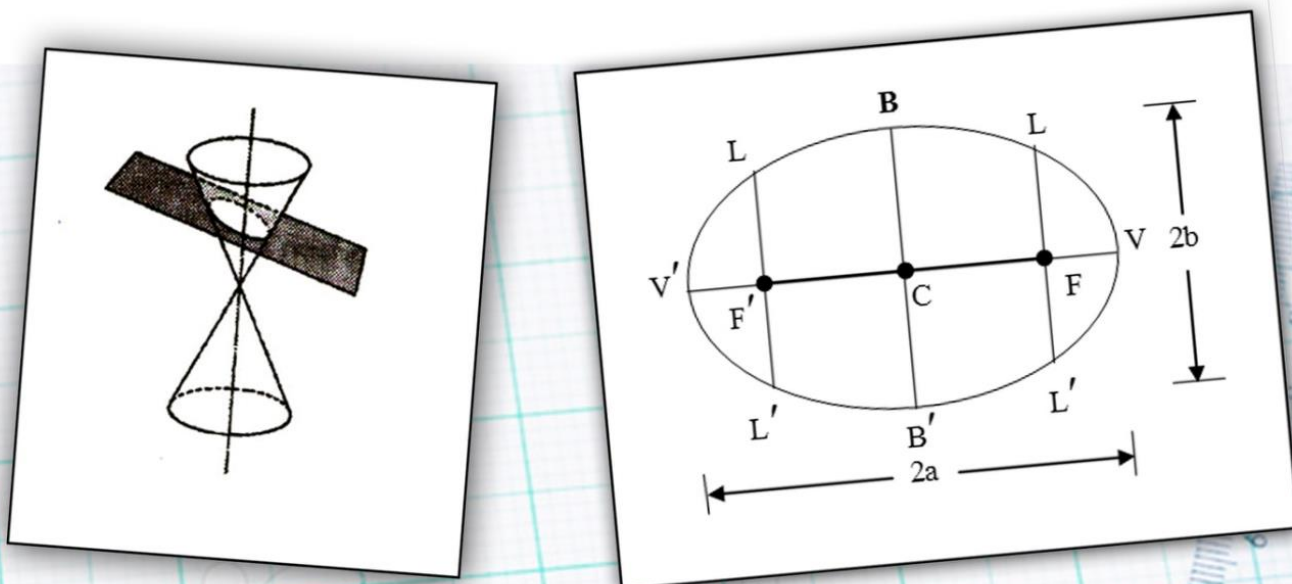
เรื่อง

แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ ภาคตัดกรวย

ค31202 รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วงรี

เล่มที่ 5 ส่วนประกอบของวงรี



จัดทำโดย นายประยุทธ์ รณากาญจนภาส
ตำแหน่ง ครูชำนาญการ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โรงเรียนพระปฐมวิทยาลัย

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 9

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

แบบฝึกทักษะเรื่อง ภาคตัดกรวย เล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี จัดทำขึ้นเพื่อประกอบการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค31202 สำหรับนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยจัดกิจกรรมการเรียนรู้ควบคู่กับการจัดการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการสอนแบบร่วมมือกันเรียนรู้ เทคนิค STAD ซึ่งเป็นรูปแบบการเรียนรู้ที่จะช่วยพัฒนานักเรียนให้ประสบผลสำเร็จในการเรียนคือ พัฒนานักเรียนทางด้านสติปัญญา ด้านสังคม โดยให้นักเรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเล็กๆ กำหนดบทบาทของสมาชิก นักเรียนแต่ละคน มีความรับผิดชอบในงานของตน นักเรียนที่เรียนเก่งช่วยเหลือนักเรียนที่เรียนอ่อน สนับสนุนความคิด ความสำเร็จซึ่งกันและกัน สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข โดยนักเรียนจะต้องคำนึงถึงรางวัลหรือเป้าหมายของกลุ่ม ความหมายของแต่ละบุคคลในกลุ่ม และสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มมีโอกาที่จะช่วยให้กลุ่มประสบความสำเร็จเท่าเทียมกัน

แบบฝึกทักษะนี้จะช่วยส่งเสริมการเรียนรู้ให้ผู้เรียนได้ฝึกฝนทักษะเพิ่มเติม เพื่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจในบทเรียนเรื่องภาคตัดกรวย ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และส่งเสริมให้นักเรียนมีทัศนคติที่ดีต่อการเรียน คณิตศาสตร์ ภายในเล่มประกอบด้วย ใบความรู้ แบบฝึกทักษะ และแบบทดสอบท้ายวงจรปฏิบัติการจะมีปรากฏเฉพาะเล่มที่ 3, เล่มที่ 6, เล่มที่ 9 และเล่มที่ 12 โดยแบบฝึกทักษะแต่ละเล่มเน้นทักษะการคิดคำนวณ ความสมเหตุสมผล การเชื่อมโยงกับเนื้อหาต่างๆ ที่ได้เรียนมา

การจัดทำแบบฝึกทักษะได้สำเร็จล่วงไปด้วยดี ได้รับการสนับสนุนส่งเสริมจากผู้อำนวยการโรงเรียนสมุทรสาครวิทยาลัย คณะครูโรงเรียนสมุทรสาครวิทยาลัย และผู้อำนวยการโรงเรียน พระปฐมวิทยาลัย คณะครูโรงเรียนพระปฐมวิทยาลัย และขอขอบคุณทุกท่านที่ได้นำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่องภาคตัดกรวย ไปทำการทดลองใช้พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะ และคำแนะนำจนทำให้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ทั้ง 12 เล่มเสร็จสมบูรณ์

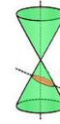
ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะนี้จะเป็นประโยชน์ ต่อการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ต่อไป

ประยูทธ ธนากาญจน์ภาส

สารบัญ

หน้า

คำชี้แจงในการใช้แบบฝึกทักษะ	1
บทบาทและหน้าที่ของนักเรียน	2
สาระสำคัญ	3
จุดประสงค์การเรียนรู้	3
สาระการเรียนรู้	3
ใบความรู้ที่ 5.1 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$	4
แบบฝึกทักษะ 5.1 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$	11
แบบฝึกทักษะ 5.2 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$	12
ใบความรู้ที่ 5.2 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)	16
แบบฝึกทักษะ 5.3 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)	22
แบบฝึกทักษะ 5.4 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)	23
ภาคผนวก	
เฉลยแบบฝึกทักษะ 5.1	27
เฉลยแบบฝึกทักษะ 5.2	28
เฉลยแบบฝึกทักษะ 5.3	32
เฉลยแบบฝึกทักษะ 5.4	33
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6	36
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7	45
บรรณานุกรม	55



คำชี้แจงในการใช้แบบฝึกทักษะ

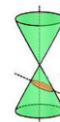
ข้อตกลงในการใช้แบบฝึกทักษะ

การทำแบบฝึกทักษะเรื่อง ภาคตัดกรวย เล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี เล่มนี้ จะทำแบบฝึกควบคู่ไปกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการสอนแบบร่วมมือกันเรียนรู้ เทคนิค STAD (Student Teams Achievement Divisions) ซึ่งเป็นรูปแบบการเรียนรู้ที่จะช่วยพัฒนาให้นักเรียนให้ประสบผลสำเร็จในการเรียนคือ พัฒนานักเรียนทางด้านสติปัญญา ด้านสังคม โดยให้นักเรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 - 5 คน กำหนดบทบาทของสมาชิก นักเรียนแต่ละคน มีความรับผิดชอบในงานของตน นักเรียนที่เรียนเก่งช่วยเหลือนักเรียนที่เรียนอ่อน สนับสนุนความคิดความสำเร็จซึ่งกันและกัน สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข โดยสมาชิกในกลุ่มประกอบด้วยนักเรียนเก่ง ปานกลาง และอ่อน นักเรียนควรมีความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ไม่เปิดดูเฉลยก่อน เพราะถ้านักเรียนเปิดดูเฉลยก่อนเท่ากับว่านักเรียนลอกคำตอบซึ่งทำให้นักเรียนไม่ได้ทดสอบความรู้ความเข้าใจสิ่งที่ได้ศึกษาไป

คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะ

1. นักเรียนในกลุ่มมีบทบาทหน้าที่ ที่แตกต่างกันไป โดยช่วยกันศึกษาเอกสารจากแบบฝึกทักษะ ควบคู่ไปกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการสอนแบบร่วมมือกันเรียนรู้ เทคนิค STAD โดยมีครูคอยแนะนำ
2. นักเรียนทุกคนทำแบบฝึกทักษะ โดยภายในกลุ่มต้องช่วยเหลือซึ่งกันและกัน คนเก่งช่วยเหลือคนที่มีความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์น้อยกว่า
3. เมื่อทำแบบฝึกทักษะเสร็จ สมาชิกภายในกลุ่มต้องช่วยกันตรวจคำตอบจากเฉลยท้ายแบบฝึกทักษะ และช่วยกันแก้ไขเมื่อมีคำตอบผิด





บทบาทและหน้าที่ของนักเรียน

ครูต้องชี้แจงให้นักเรียนทราบถึงบทบาทของนักเรียน ดังนี้

1. หัวหน้ากลุ่ม มีหน้าที่ดังนี้

- 1) เป็นผู้นำในการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่ม โดยทำหน้าที่อ่านใบความรู้เพื่อให้ทุกคนทำตาม คำชี้แจงในการทำกิจกรรมให้เป็นไปตามขั้นตอน
- 2) ควบคุมดูแลการทำกิจกรรม และกิจกรรมกลุ่ม ให้เป็นไปด้วยความเรียบร้อย ไม่ส่งเสียงดังรบกวนกลุ่มอื่น
- 3) ตรวจสอบความถูกต้องให้เรียบร้อยหลังจากเสร็จสิ้นการทำกิจกรรมการเรียนรู้แล้ว
- 4) เป็นผู้ติดต่อสื่อสารกับครูเมื่อมีปัญหาภายในกลุ่ม
- 5) คอยกระตุ้นให้สมาชิกในกลุ่มเห็นความสำคัญของคะแนนการพัฒนาของรายบุคคล และของกลุ่มเพื่อความรู้ความเข้าใจในกลุ่ม และความภาคภูมิใจในของทุกคน
- 6) ร่วมอภิปรายและสรุปผลการปฏิบัติกิจกรรม

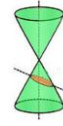
2. สมาชิกกลุ่ม มีหน้าที่ดังนี้

- 1) ปฏิบัติกิจกรรมด้วยความตั้งใจ และให้ทันตามกำหนดโดยไม่ชวนเพื่อนคุยหรือเล่น
- 2) ศึกษาใบความรู้ แบบฝึกทักษะ และปรึกษาหารือวิธีคิดหาคำตอบภายในกลุ่ม
- 3) ร่วมอภิปราย และสรุปผลการปฏิบัติกิจกรรม

3. เลขานุการ มีหน้าที่คือ

- 1) บันทึกสรุปความรู้ที่ได้รับในการอภิปรายกลุ่ม เพื่ออธิบายความรู้ที่ได้รับให้เพื่อน ที่ยังไม่เข้าใจฟังเพิ่มเติม
- 2) เป็นผู้แจกแบบฝึกทักษะ และรวบรวมนำไปส่งครูเมื่อสมาชิกทุกคนทำเสร็จเรียบร้อยแล้ว
- 3) เป็นผู้อ่านเฉลยแต่ละกิจกรรมให้เพื่อนฟังเพื่อตรวจสอบคำตอบ
- 4) ร่วมอภิปราย และสรุปผลการปฏิบัติกิจกรรม





แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ ค31202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เน้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนแบบ STAD เรื่อง ภาคตัดกรวย เล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี

สาระสำคัญ

ภาคตัดกรวย (Conic Section) หมายถึง เส้นโค้ง ซึ่ง ได้แก่ วงกลม(circle) พาราโบลา (parabola) วงรี (ellipse) และไฮเพอร์โบลา (hyperbola) ที่เกิดจากการนำระนาบไปตัดกรวยกลมตรง

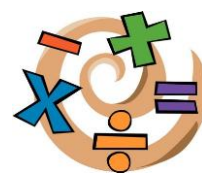
วงรี (ellipse) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุด F_1 และ F_2 ที่ตรึงอยู่กับที่ มีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด จุดสองจุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **โฟกัส** (focus) ของวงรี

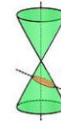
จุดประสงค์การเรียนรู้

1. หาส่วนประกอบต่างๆ ของวงรีที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดได้อย่างถูกต้อง
2. หาส่วนประกอบต่างๆ ของวงรีที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ได้อย่างถูกต้อง
3. เปลี่ยนสมการวงรีในรูปทั่วไปให้เป็นรูปมาตรฐาน และบอกส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และ (h, k) ให้ได้

สาระการเรียนรู้

1. ส่วนประกอบต่างๆ ของวงรี
2. การเปลี่ยนสมการวงรีในรูปทั่วไปให้เป็นสมการวงรีในรูปมาตรฐาน





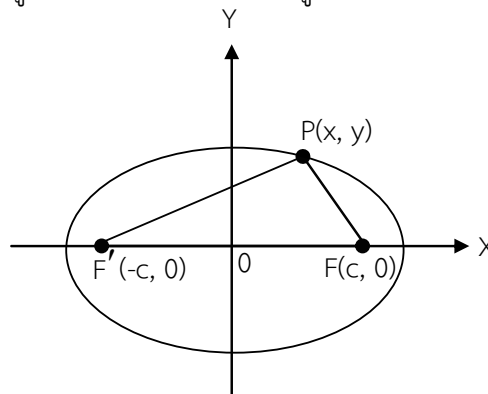
ใบความรู้ที่ 5.1

วิชาคณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$

ในการหาสมการรูปร่างอย่างง่ายของวงรี เราสร้างระบบพิกัดฉากให้โฟกัสอยู่บนแกน X ที่ $F'(-c, 0)$ และ $F(c, 0)$ จุดกำเนิดอยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัส ดังรูป



เพื่อความสะดวก ให้ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีถึงโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2a$

โดยที่ $a > c$ จะได้ว่า ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรีแล้ว $PF' + PF = 2a$

$$\text{จากสูตรระยะทางจะได้ว่า } \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\text{หรือ } \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

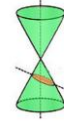
$$\text{หรือ } 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc$$

หารด้วย 4 แล้วยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = (a^2 - cx)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$



จาก $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

จะเห็นว่า $a > c$ ดังนั้น $a^2 - c^2 > 0$ และนำ $a^2(a^2 - c^2)$ หารตลอดจะได้ว่า

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

เพื่อความสะดวกให้ $b^2 = a^2 - c^2$ (โดยที่ $b > 0$) เนื่องจาก $b^2 < a^2$ จะได้ว่า $b < a$ และ

สมการสุดท้ายที่จะได้คือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$ สมการนี้เป็นสมการวงรีที่กำหนดให้

ในการเขียนกราฟของวงรีนี้ เราต้องทราบระยะตัดแกน X และระยะตัดแกน Y

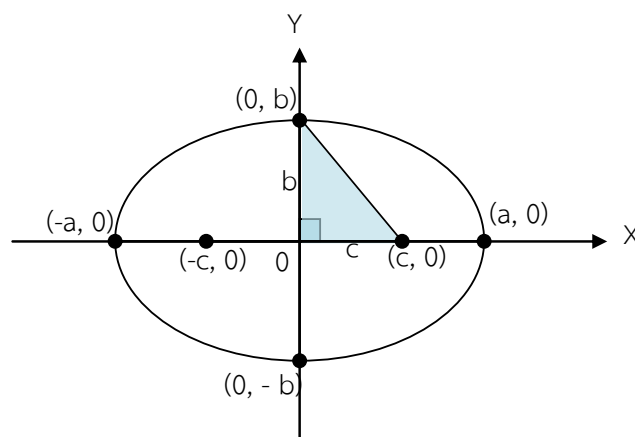
ให้ $y = 0$ จะได้ว่า $\frac{x^2}{a^2} = 1$

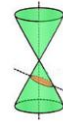
$$x^2 = a^2$$

$$x = \pm a$$

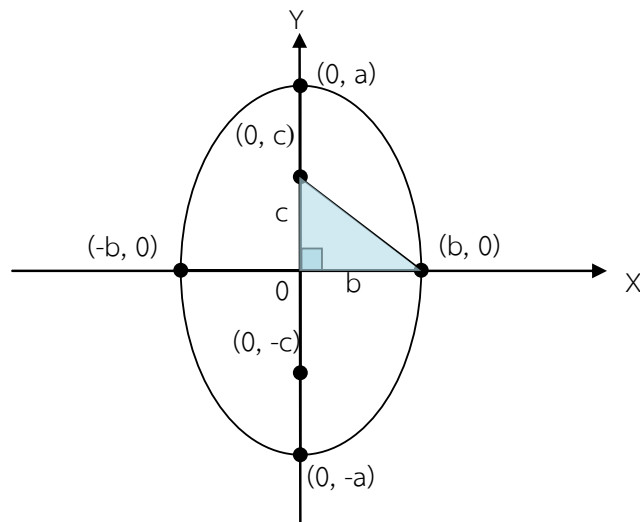
ดังนั้น วงรีตัดแกน X ที่ จุด $(-a, 0)$ และ $(a, 0)$ จุดทั้งสองนี้เรียกว่า จุดยอด (vertices) ของวงรี ส่วนเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดเรียกว่า แกนเอก (major axis) ของวงรี ความยาวแกนเอกเท่ากับ $2a$ จุดกึ่งกลางของแกนเอกเรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของวงรี วงรีนี้จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

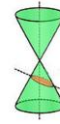
ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $x = 0$ เราจะได้ $y = \pm b$ ดังนั้น วงรีตัดแกน Y ที่ $(0, -b)$ และ $(0, b)$ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดทั้งสองนี้เรียกว่า แกนโท (minor axis) ของวงรี ความยาวแกนโทเท่ากับ $2b$ จะสังเกตว่า $2a > 2b$ ดังนั้นแกนเอกยาวกว่าแกนโท ดังรูป



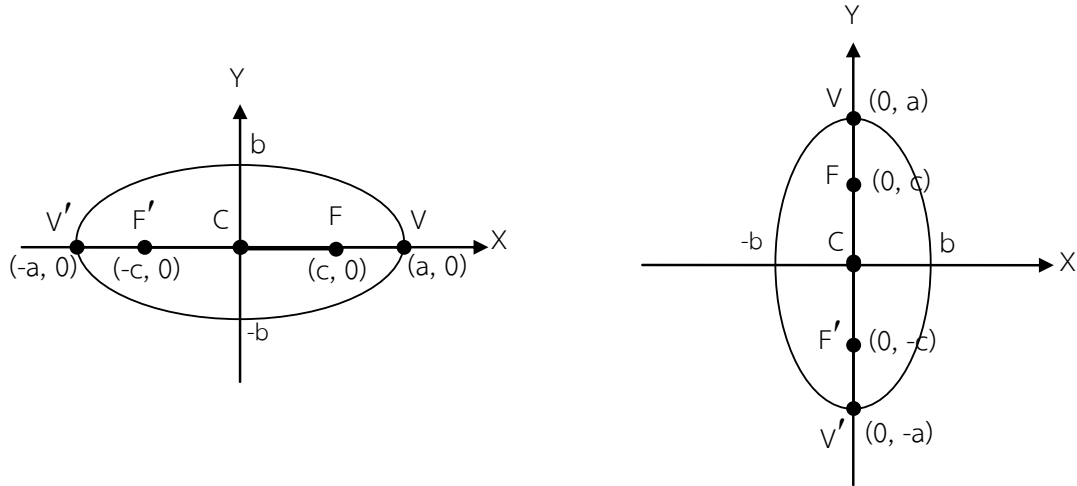


ถ้าเราสร้างระบบพิกัดฉากให้โฟกัสของวงรีอยู่บนแกน Y ที่จุด $(0, \pm c)$ ดังรูปข้างล่าง จะได้
วงรีในแนวตั้ง และสมการของวงรีเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

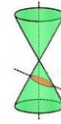




ข้อสรุปเกี่ยวกับวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ เป็นดังนี้



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	สมการรูปแบบมาตรฐาน	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
แกน X	แกนเอก	แกน Y
C (0, 0)	Center	C (0, 0)
V ($\pm a$, 0)	จุดยอด	V (0, $\pm a$)
F ($\pm c$, 0)	โฟกัส	F (0, $\pm c$)
$\frac{2b^2}{a}$	L.R	$\frac{2b^2}{a}$
$\frac{c}{a}$	e	$\frac{c}{a}$
y = 0	สมการแกนเอก	x = 0
x = 0	สมการแกนโท	y = 0
$a^2 = b^2 + c^2$		



ข้อสังเกต

ในสมการรูปแบบมาตรฐาน ที่ขวามือเป็น 1

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ และ } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

จะเห็นว่าตัวเลขใต้แกนใดมาก แกนนั้นเป็นแกนเอก

ในรูปสมการทั่วไป

$$Ax^2 + By^2 = AB \text{ และ } A \neq B$$

จะเห็นว่า สัมประสิทธิ์ของแกนใดน้อย แกนนั้นเป็นแกนเอก

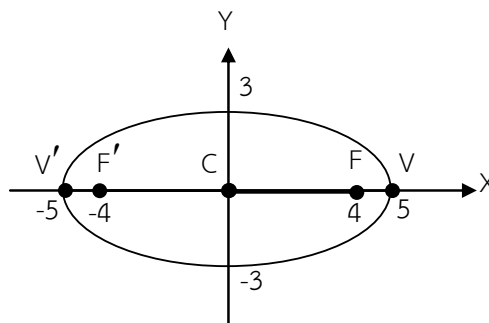
ตัวอย่างที่ 1 จากสมการวงรี $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ จงเขียนวาดกราฟ และหาจุดยอดและ
โฟกัสของวงรี

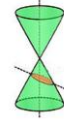
วิธีทำ จาก $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ จะได้ว่า จุดศูนย์กลาง อยู่ที่จุด (0, 0)
เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เนื่องจากตัวเลขใต้แกน X มากกว่า

จะได้ $a^2 = 25$ และ $b^2 = 9$
 $a = 5$ และ $b = 3$

และ $c^2 = a^2 - b^2$
 $c^2 = 25 - 9$
 $c = 4$

เนื่องจาก แกนเอกคือแกน X เพราะตัวเลขใต้แกน X มากกว่าจะวาดรูปได้ดังนี้





จากรูป จะได้ว่า

1. วงรี มีแกน X เป็นแกนเอก และสมการแกนเอก คือ $y = 0$
มีแกน Y เป็นแกนโท และสมการแกนโท คือ $x = 0$
2. จุดยอด คือ $V (\pm 5, 0)$
3. โฟกัส คือ $F (\pm 4, 0)$

ตัวอย่างที่ 2 จากสมการวงรี $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$ จงเขียนวาดกราฟ และหาจุดยอด และ

โฟกัสของวงรี

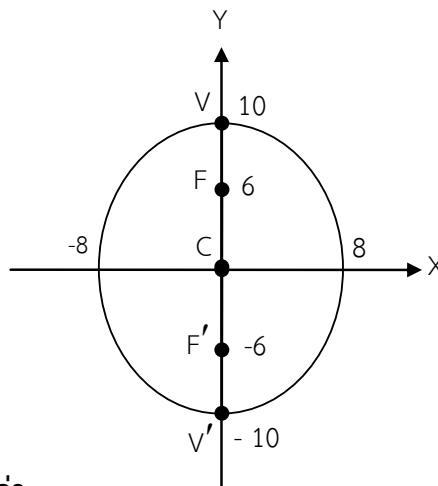
วิธีทำ จาก $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$ จะได้ว่า จุดศูนย์กลาง อยู่ที่จุด $(0, 0)$

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เนื่องจากตัวเลขใต้แกน Y มากกว่า

$$\text{จะได้ } a^2 = 10^2 \text{ และ } b^2 = 8^2 \\ = 10 \text{ และ } b = 8$$

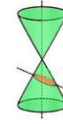
$$\text{และ } c^2 = a^2 - b^2 \\ c^2 = 100 - 64 \\ c = 6$$

เนื่องจาก แกนเอกคือแกน Y เพราะตัวเลขใต้แกน Y มากกว่าจะวาดรูปได้ดังนี้



จากรูป จะได้ว่า

1. วงรี มีแกน Y เป็นแกนเอก และสมการแกนเอก คือ $x = 0$
มีแกน X เป็นแกนโท และสมการแกนโท คือ $y = 0$
2. จุดยอด คือ $V (\pm 10, 0)$
3. โฟกัส คือ $F (\pm 6, 0)$



ตัวอย่างที่ 3 จากสมการวงรี $25x^2 + 16y^2 = 400$ จงเขียนกราฟของวงรี

และหาส่วนประกอบต่างๆของวงรี

วิธีทำ จาก $25x^2 + 16y^2 = 400$ ปรับสมการโดยนำ 400 หารตลอด

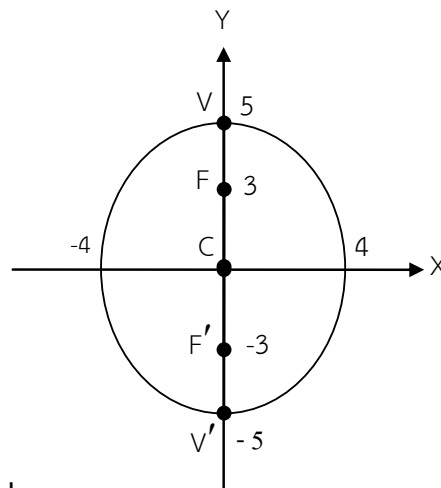
จะได้ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เนื่องจากตัวเลขใต้แกน Y มากกว่า

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a^2 &= 25 \text{ และ } b^2 = 16 \\ a &= 5 \text{ และ } b = 4 \end{aligned}$$

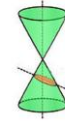
$$\begin{aligned} \text{และ } c^2 &= a^2 - b^2 \\ c^2 &= 25 - 16 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

เนื่องจาก แกนเอกคือแกน Y เพราะตัวเลขใต้แกน Y มากกว่าจะวาดรูปได้ดังนี้



จากรูป จะได้ว่า

1. วงรี มีแกน Y เป็นแกนเอก และสมการแกนเอก คือ $x = 0$
มีแกน X เป็นแกนโท และสมการแกนโท คือ $y = 0$
2. จุดยอด คือ V $(0, \pm 5)$
3. โฟกัส คือ F $(0, \pm 3)$
4. Latus Rectum = L.R = $\frac{2b^2}{a} = \frac{32}{5}$
5. ความเยื้องศูนย์กลาง คือ $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$



แบบฝึกทักษะ 5.1

วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0)

ชื่อ.....ชั้น ม. 4 / เลขที่

คำชี้แจง ให้นำตัวอักษร A – G ซึ่งเป็นจุดยอดและโฟกัสของวงรีต่างๆ มาใส่ด้านหน้าของสมการวงรีดังต่อไปนี้

.....1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$



V(0, ± 6)
F (0, ± 3)

.....2. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{49} = 1$



V(± 3, 0)
F(± √3, 0)

.....3. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1$



V(0, ± 6)
F (0, ± 3√3)

.....4. $2x^2 + 3y^2 = 18$



V(± 10, 0)
F(± 6, 0)

.....5. $100x^2 + 64y^2 - 6400 = 0$



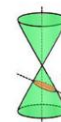
V(± 9, 0)
F(± 4√2, 0)



V(0, ± 10)
F(0, ± 6)



V(± 10, 0)
F(± √19, 0)



แบบฝึกทักษะ 5.2

วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0)

ชื่อ.....ชั้น ม. 4 / เลขที่

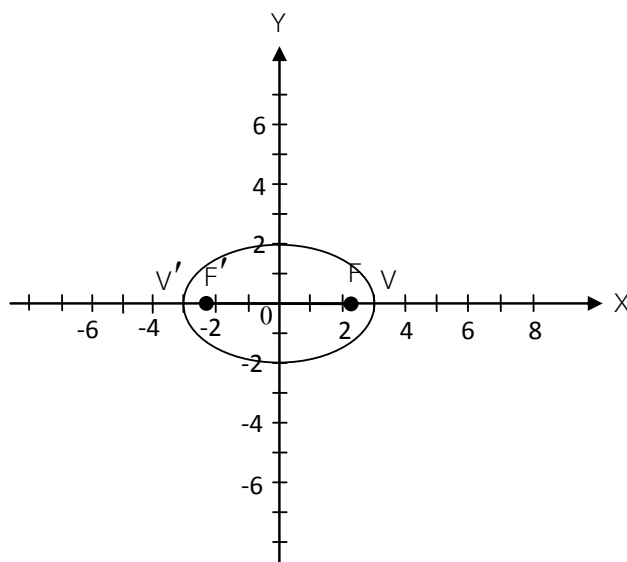
คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมข้อความลงในช่องว่างให้ถูกต้องครบถ้วนและสมบูรณ์

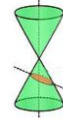
1. จากสมการวงรี $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ จงเขียนกราฟวงรีและหาส่วนประกอบต่างๆของวงรีวิธีทำ จาก $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ จะได้ว่า จุดศูนย์กลาง อยู่ที่จุด (0, 0)เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เนื่องจากตัวเลขใต้แกน X มากกว่า

จะได้ $a^2 = 9$ และ $b^2 = 4$
 $a = 3$ และ $b = 2$

และ $c^2 = a^2 - b^2$
 $c^2 = 9 - 4$
 $c = \sqrt{5}$

เนื่องจาก แกนเอกคือแกน X เพราะตัวเลขใต้แกน X มากกว่าจะวาดรูปได้ดังนี้

1) วงรี มีแกน X เป็นแกนเอก และสมการแกนเอก คือ $y = 0$ มีแกน Y เป็นแกนโท และสมการแกนโท คือ $x = 0$



2) จุดยอด คือ _____

3) จุดโฟกัส คือ _____

4) Latus Rectun เท่ากับ _____

2. จากสมการวงรี $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$ จงเขียนกราฟวงรีและหาส่วนประกอบต่างๆของวงรี

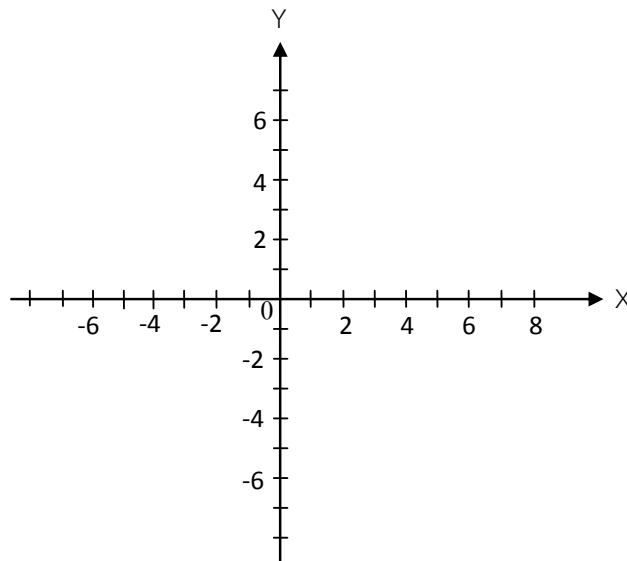
วิธีทำ จาก $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$ จะได้ว่า จุดศูนย์กลาง อยู่ที่จุด (0, 0)

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เนื่องจากตัวเลขใต้แกน X มากกว่า

จะได้ $a^2 = 36$ และ $b^2 = 25$
 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ และ $b = \underline{\hspace{1cm}}$

และ $c^2 = a^2 - b^2$
 $c^2 = \underline{\hspace{1cm}}$
 $c = \underline{\hspace{1cm}}$

เนื่องจาก แกนเอกคือแกน Y เพราะตัวเลขใต้แกน Y มากกว่าจะวาดรูปได้ดังนี้



1) วงรี มีแกน Y เป็นแกนเอก และสมการแกนเอก คือ $x = 0$

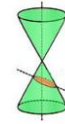
มีแกน X เป็นแกนโท และสมการแกนโท คือ $y = 0$

2) จุดยอด คือ _____

3) จุดโฟกัส คือ _____

4) Latus Rectun = _____

5) ความเยื้องศูนย์กลาง คือ _____



3. จากสมการวงรี $25x^2 + 9y^2 = 225$ จงเขียนกราฟของวงรี และหาส่วนประกอบต่างๆของวงรี

วิธีทำ จาก $25x^2 + 9y^2 = 225$ ปรับสมการโดยนำ 400 หารตลอด

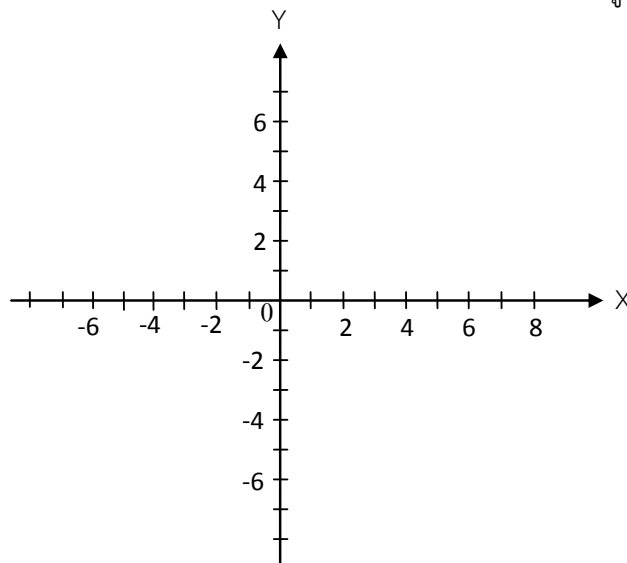
จะได้ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ และ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เนื่องจากตัวเลขใต้แกน Y มากกว่า

จะได้ $a^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ และ $b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ และ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

และ $c^2 = a^2 - b^2$
 $c^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $c = \underline{\hspace{2cm}}$

เนื่องจาก แกนเอกคือแกน Y เพราะตัวเลขใต้แกน Y มากกว่าจะวาดรูปได้ดังนี้



1) วงรี มีแกน Y เป็นแกนเอก และสมการแกนเอก คือ $x = 0$

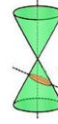
มีแกน X เป็นแกนโท และสมการแกนโท คือ $y = 0$

2) จุดยอด คือ $\underline{\hspace{4cm}}$

3) จุดโฟกัส คือ $\underline{\hspace{4cm}}$

4) Latus Rectun = L.R = $\underline{\hspace{4cm}}$

5) ความเยื้องศูนย์กลาง คือ $\underline{\hspace{4cm}}$



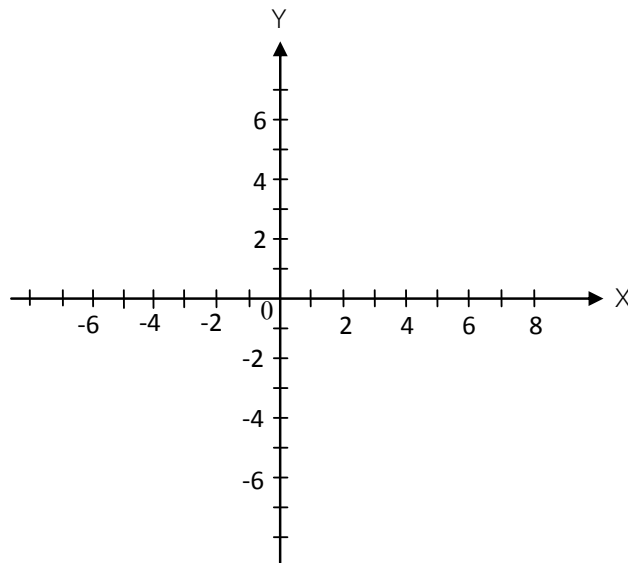
4. จากสมการวงรี $3x^2 + 9y^2 - 27 = 0$ จงเขียนกราฟของวงรี และหาส่วนประกอบ
ต่างๆวงรี

วิธีทำ

จะได้ $a^2 = 9$ และ $b^2 = 3$
 $a = 3$ และ $b = \sqrt{3}$

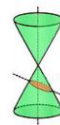
และ $c^2 = a^2 - b^2$
 $c^2 = 9 - 3$
 $c = \sqrt{6}$

เนื่องจาก แกนเอกคือแกน X เพราะตัวเลขใต้แกน X มากกว่าจะวาดรูปได้ดังนี้



1) วงรี มีแกน X เป็นแกนเอก และสมการแกนเอก คือ $y = 0$
 มีแกน Y เป็นแกนโท และสมการแกนโท คือ $x = 0$





ใบความรู้ที่ 5.2

วิชาคณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

ในกรณีทั่วไป สำหรับสมการใด ๆ ในตัวแปร x และ y ถ้าเราแทน x ด้วย $x - h$ หรือ $x + h$ กราฟของสมการใหม่ก็คือกราฟของสมการเดิมที่เลื่อนไปตามแนวนอน ถ้าเราแทน y ด้วย $y - k$ หรือ $y + k$ กราฟของสมการใหม่ก็คือกราฟของสมการเดิมที่เลื่อนไปตามแนวตั้ง จะสรุปได้ว่า

การเลื่อนกราฟของสมการ

ถ้า h และ k เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว การแทน x ด้วย $x - h$ หรือ $x + h$ และการแทน y ด้วย $y - k$ หรือ $y + k$ จะมีผลต่อกราฟของสมการใด ๆ ในตัวแปร x และ y ดังนี้

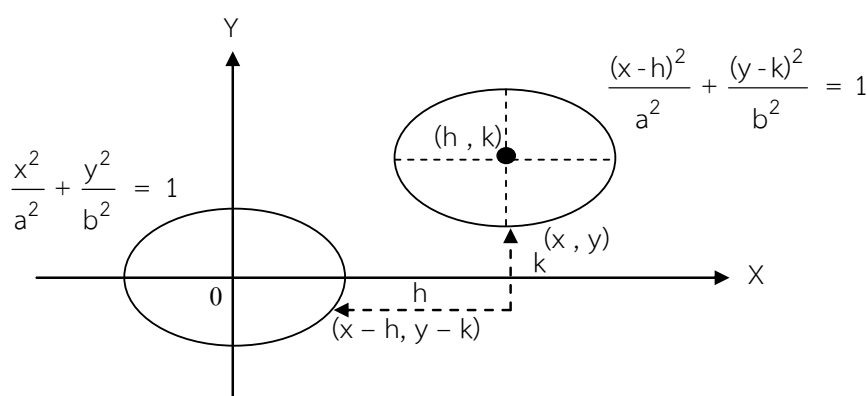
วิธีการแทน

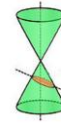
1. แทน x ด้วย $x - h$
2. แทน x ด้วย $x + h$
3. แทน y ด้วย $y - k$
4. แทน y ด้วย $y + k$

กราฟเลื่อนไปอย่างไร

- ไปทางขวา h หน่วย
- ไปทางซ้าย h หน่วย
- ไปข้างบน k หน่วย
- ลงข้างล่าง k หน่วย

จากรูปในด้านล่าง ถ้าเราเลื่อนวงรีรูปนี้ให้จุดศูนย์กลางของวงรีไปอยู่ที่จุด (h, k) แล้ว สมการของวงรีรูปใหม่จะเป็นดังรูปด้านล่าง





ตัวอย่าง การเขียนกราฟของ $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ โดยอาศัยการเลื่อนกราฟ

และหาโฟกัส

วิธีทำ วงรีที่กำหนดให้ $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1, -2)$ เกิดจาก

การเลื่อนวงรี $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ไปทางขวา 1 หน่วย

และลงล่าง 2 หน่วย จุดปลายของแกนเอกและแกนโทของวงรี $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ คือ

$(0, 3), (0, -3)$ และ $(2, 0), (-2, 0)$

ถ้าเลื่อนจุดเหล่านี้ไปทางขวา 1 หน่วย และลงล่าง 2 หน่วย จะได้จุดปลายของแกนเอกและแกนโทของวงรีที่กำหนดให้ดังนี้

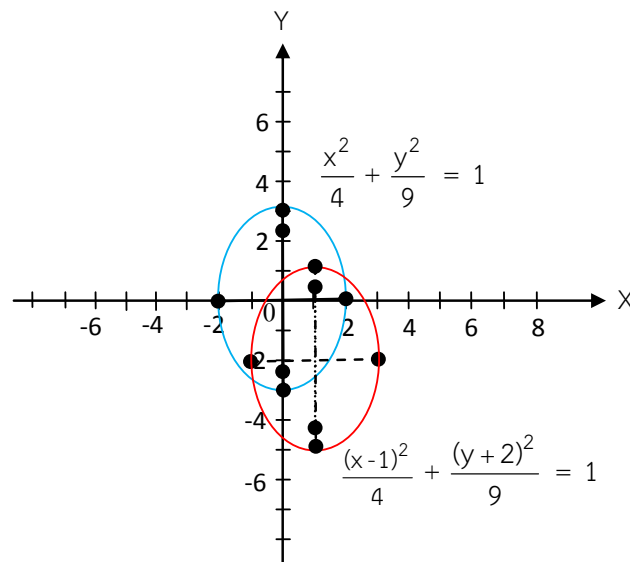
$(0, 3)$ เลื่อนไปยังจุด $(0 + 1, 3 - 2) = (1, 1)$

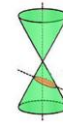
$(0, -3)$ เลื่อนไปยังจุด $(0 + 1, -3 - 2) = (1, -5)$

$(2, 0)$ เลื่อนไปยังจุด $(2 + 1, 0 - 2) = (3, -2)$

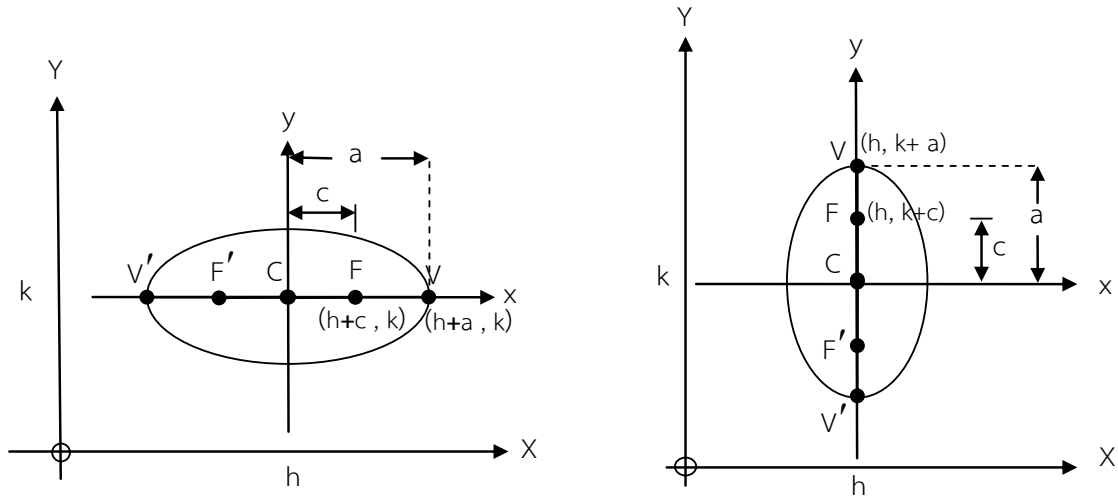
$(-2, 0)$ เลื่อนไปยังจุด $(-2 + 1, 0 - 2) = (-1, -2)$

จุดเหล่านี้จะช่วยให้เราเขียนกราฟได้ง่ายขึ้น ดังรูปด้านล่างนี้

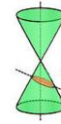




อาศัยหลักการเลื่อนขนาน เราสามารถสรุปเกี่ยวกับวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) ได้ดังนี้



$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	สมการรูปแบบมาตรฐาน	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
ขนาน แกน X	แกนเอก	ขนานแกน Y
$C(h, k)$	Center	$C(h, k)$
$V(h \pm a, k)$	จุดยอด	$V(h, k \pm a)$
$F(h \pm c, k)$	โฟกัส	$F(h, k \pm c)$
$\frac{2b^2}{a}$	L.R	$\frac{2b^2}{a}$
$\frac{c}{a}$	e	$\frac{c}{a}$
$y - k = 0$	สมการแกนเอก	$x - h = 0$
$x - h = 0$	สมการแกนโท	$y - k = 0$
$a^2 = b^2 + c^2$		



ข้อสังเกต

ในสมการรูปแบบมาตรฐาน ที่ขวามือเป็น 1

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{และ} \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

จะเห็นว่าตัวเลขใต้แกนใดมาก แกนนั่นเป็นแกนเอก

ในรูปสมการทั่วไป

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad \text{และ} \quad A \neq B$$

จะเห็นว่า สัมประสิทธิ์ของแกนใดน้อย แกนนั่นเป็นแกนเอก

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอดและจุดโฟกัสของวงรี $\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$

วิธีทำ จะได้ว่า แกนเอก ขนานกับแกน X (เลขใต้แกน X มากกว่า)

จะได้ $a^2 = 36$, $a = 6$ และ $b^2 = 16$, $b = 4$

$$c^2 = 36 - 16 \quad \text{และ} \quad c = \sqrt{20}$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (6, 4)

จุดยอด คือ $V(6 \pm 6, 4)$ หรือ $(12, 4)$ และ $(0, 4)$

และ โฟกัส คือ $F(6 \pm \sqrt{20}, 4)$ หรือ $F(6 + \sqrt{20}, 4)$ และ $F(6 - \sqrt{20}, 4)$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอดและจุดโฟกัสของวงรี $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$

วิธีทำ จะได้ว่า แกนเอก ขนานกับแกน Y (เลขใต้แกน Y มากกว่า)

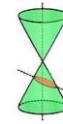
จะได้ $a^2 = 25$, $a = 5$ และ $b^2 = 9$, $b = 3$

$$c^2 = 25 - 9 \quad \text{และ} \quad c = 4$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (-1, -2)

จุดยอด คือ $V(-1, -2 \pm 5)$ หรือ $(-1, 3)$ และ $(-1, -7)$

และ โฟกัส คือ $F(-1, -2 \pm 4)$ หรือ $(-1, 2)$ และ $(-1, -6)$



ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนกราฟและหาส่วนต่าง ๆ ของวงรีที่มีสมการเป็น

$$16(x - 1)^2 + 25(y - 3)^2 = 400$$

วิธีทำ จากสมการ $16(x - 1)^2 + 25(y - 3)^2 = 400$ นำ 400 หารตลอด

$$\text{จะได้ว่า } \frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{(y-3)^2}{4^2} = 1$$

จะเห็นว่า แกนเอก ขนานกับแกน X (เลขใต้แกน X มากกว่า)

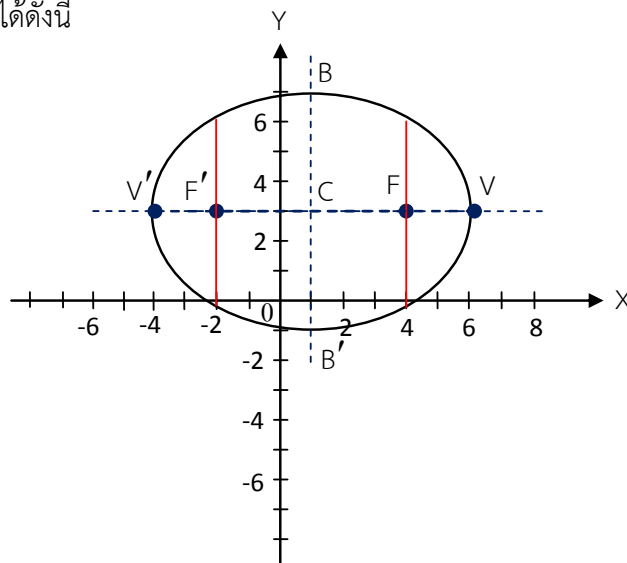
$$\text{เปรียบเทียบกับสมการ } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{จะได้ } a^2 = 25 \text{ และ } b^2 = 16 \\ a = 5 \text{ และ } b = 4$$

$$\text{และ } c^2 = 25 - 16 \\ c = 3$$

1. สมการแกนเอก คือ $y - 3 = 0$ หรือ $y = 3$
สมการแกนโท คือ $x - 1 = 0$ หรือ $x = 1$
2. จุดศูนย์กลาง คือ $C(1, 3)$
3. จุดยอด คือ $V(6, 3)$ และ $V'(-4, 3)$
4. จุดโฟกัส คือ $F(4, 3)$ และ $F'(-2, 3)$
5. Latus Rectum = L.R = $\frac{2b^2}{a} = \frac{32}{5}$
6. ความเยื้องศูนย์กลาง คือ $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

จะวาดกราฟได้ดังนี้





ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนกราฟและหาส่วนต่าง ๆ ของวงรีที่มีสมการเป็น

$$9x^2 + 4y^2 + 36x + 24y + 36 = 0$$

วิธีทำ

จากรูปทั่วไป ทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ซึ่งอยู่ในรูปมาตรฐาน

$$(9x^2 + 36x) + (4y^2 + 24y) = -36$$

$$9(x^2 + 4x + 2^2) + 4(y^2 + 6y + 3^2) = -36 + 9(2^2) + 4(3^2)$$

$$9(x + 2)^2 + 4(y + 3)^2 = 36$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1 \quad (\text{นำ } 36 \text{ หารตลอด})$$

จะได้ว่า แกนเอก ขนานกับแกน Y (เลขใต้แกน Y มากกว่า)

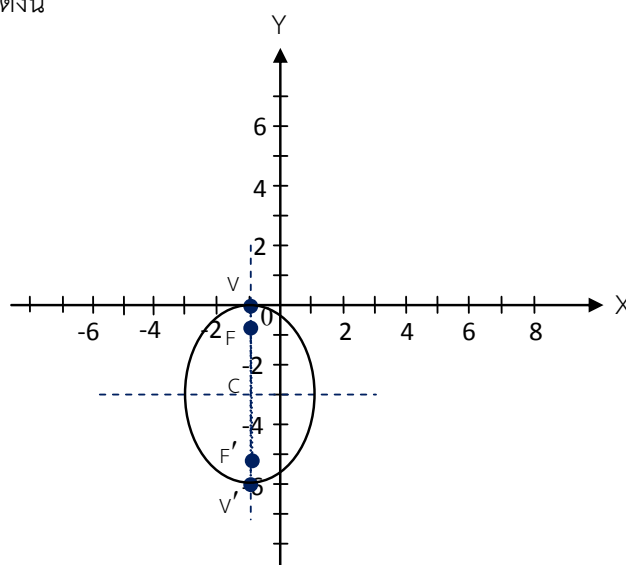
$$\text{เปรียบเทียบกับสมการ } \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

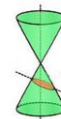
$$\text{จะได้ } a^2 = 9 \text{ และ } b^2 = 4 \\ a = 3 \text{ และ } b = 2$$

$$\text{และ } c^2 = 9 - 4 \\ c = \sqrt{5}$$

1. สมการแกนเอก คือ $x = -1$ หรือ $x + 1 = 0$
สมการแกนโท คือ $y = -3$ หรือ $y + 3 = 0$
2. จุดศูนย์กลาง คือ C $(-1, -3)$
3. จุดยอด คือ V $(-1, 0)$ และ V' $(-1, -6)$
4. จุดโฟกัส คือ F $(-1, -3 + \sqrt{5})$ และ F' $(-1, -3 - \sqrt{5})$
5. Latus Rectum = L.R = $\frac{2b^2}{a} = \frac{8}{3}$
6. ความเยื้องศูนย์กลาง คือ $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

จะวาดรูปได้ดังนี้





แบบฝึกทักษะ 5.3

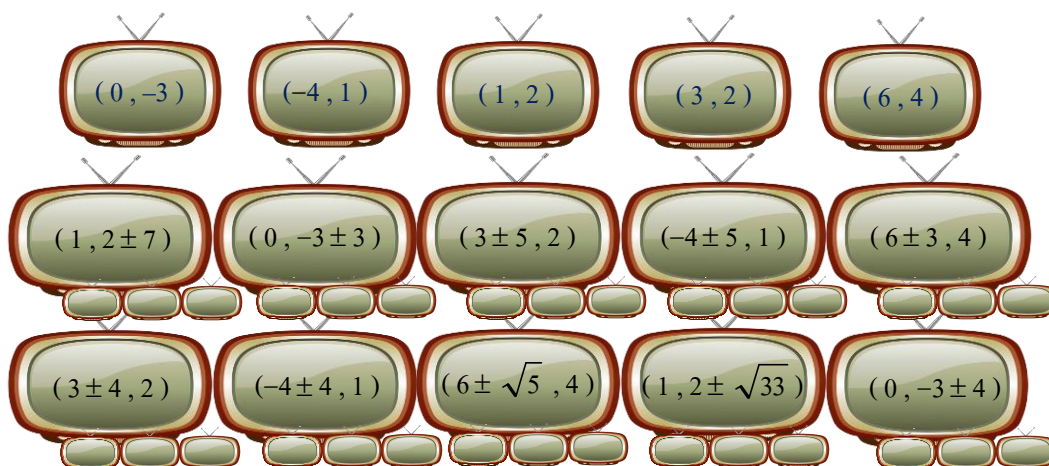
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง ส่วนประกอบต่างๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

ชื่อ.....ชั้น ม. 4 / เลขที่

กำหนดพิกัดจุดให้ดังต่อไปนี้



คำชี้แจง ให้นักเรียนเลือกพิกัดจุดจากด้านบน ที่เป็นจุดศูนย์กลาง จุดยอดและโฟกัสของสมการวงรีดังต่อไปนี้เติมลงในช่องว่างให้ถูกต้องครบถ้วน

1. $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{49} = 1$

จุดศูนย์กลาง คือ จุดยอด คือ โฟกัส คือ

2. $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

จุดศูนย์กลาง คือ จุดยอด คือ โฟกัส คือ

3. $\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$

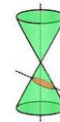
จุดศูนย์กลาง คือ จุดยอด คือ โฟกัส คือ

4. $\frac{x^2}{7} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

จุดศูนย์กลาง คือ จุดยอด คือ โฟกัส คือ

5. $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$

จุดศูนย์กลาง คือ จุดยอด คือ โฟกัส คือ



แบบฝึกทักษะ 5.4

วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง ส่วนประกอบต่างๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

ชื่อ.....ชั้น ม. 4 / เลขที่

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาส่วนประกอบต่างๆ ของวงรีและวาดกราฟ โดยเติมข้อความลงในช่องว่างให้ถูกต้องครบถ้วน จากสมการวงรีที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

วิธีทำ ได้ว่า แกนเอก ขนานกับแกน X (เลขใต้แกน X มากกว่า)

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้ $a^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ และ $b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ และ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

และ $c^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $c = \underline{\hspace{2cm}}$

1.1 สมการแกนเอก คือ $y - 3 = 0$

1.2 สมการแกนโท คือ $x - 2 = 0$

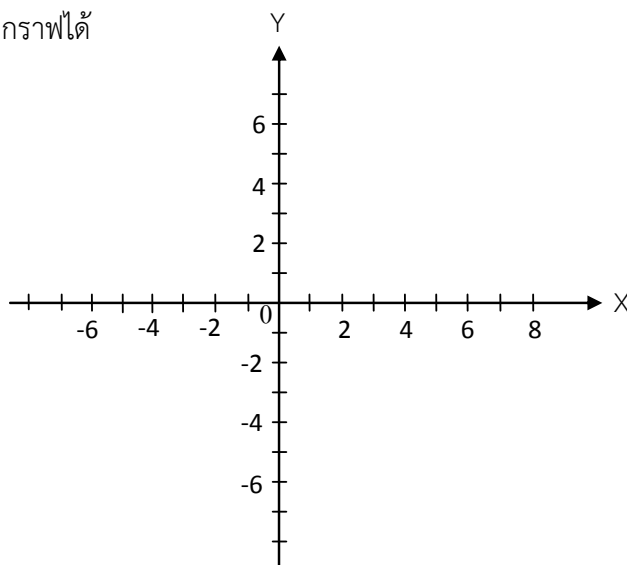
1.3 จุดศูนย์กลาง คือ $(2, 3)$

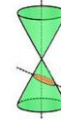
1.4 จุดยอด คือ $\underline{\hspace{4cm}}$

1.5 จุดโฟกัส คือ $\underline{\hspace{4cm}}$

1.6 Latus Rectum เท่ากับ $\underline{\hspace{4cm}}$

จะวาดกราฟได้





2. $16(x - 2)^2 + 25(y + 3)^2 - 400 = 0$ (นำ 400หารตลอด)

วิธีทำ ปรับสมการให้เข้ารูปแบบมาตรฐาน จะได้ $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

ได้ว่า แกนเอก _____

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้ $a^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ และ $b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ และ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

และ $c^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $c = \underline{\hspace{2cm}}$

2.1 สมการแกนเอก คือ $y + 3 = 0$

2.2 สมการแกนโท คือ _____

2.3 จุดศูนย์กลาง คือ $(2, -3)$

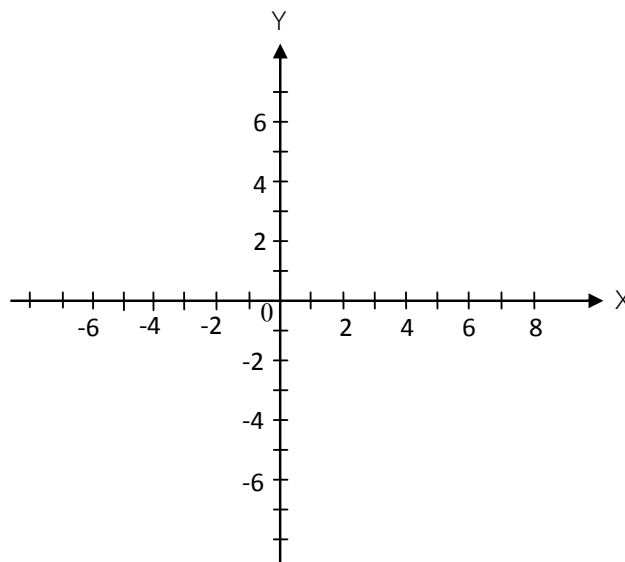
2.3 จุดยอด คือ _____

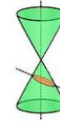
2.4 จุดโฟกัส คือ _____

2.5 Latus Rectun เท่ากับ _____

2.6 ความเยื้องศูนย์กลาง คือ _____

จะวาดกราฟได้





3. $9x^2 + 5y^2 - 18x + 30y + 9 = 0$

วิธีทำ จากรูปทั่วไป ทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ซึ่งอยู่ในรูปมาตรฐาน

$$(9x^2 - 18x) + (5y^2 + 30y) = -9$$

$$9(x^2 - 2x + 1^2) + 5(y^2 + 6y + 3^2) = -9 + 9(1^2) + 5(3^2)$$

จะได้ว่า แกนเอก _____

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

จะได้ $a^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ และ $b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ และ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

และ $c^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $c = \underline{\hspace{2cm}}$

3.1 สมการแกนเอก คือ _____

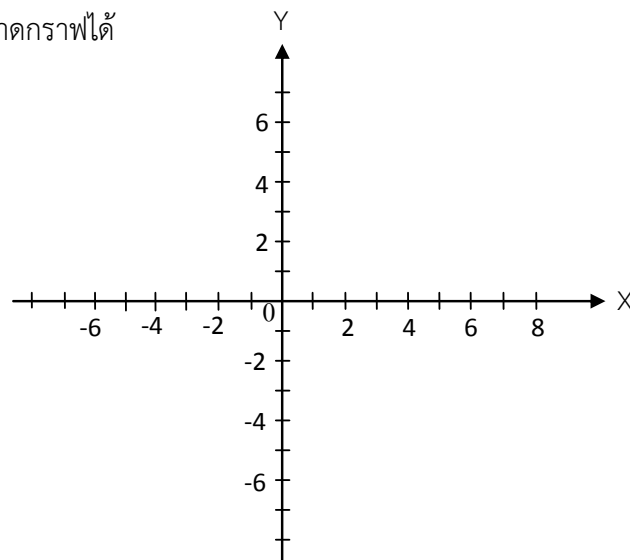
3.2 สมการแกนโท คือ $y + 3 = 0$

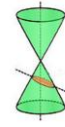
3.3 จุดศูนย์กลาง คือ _____

3.4 จุดยอด คือ _____

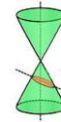
3.5 จุดโฟกัส คือ _____

จะวาดกราฟได้





ภาคผนวก



เฉลยแบบฝึกทักษะ 5.1

วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0)

ชื่อ.....ชั้น ม. 4 / เลขที่

คำชี้แจง ให้นำตัวอักษร A – G ซึ่งเป็นจุดยอดและโฟกัสของวงรีต่างๆ มาใส่ด้านหน้าของสมการวงรีดังต่อไปนี้

.....C.....1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$



V(0, ± 6)
F (0, ± 3)

.....E.....2. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{49} = 1$



V(± 3, 0)
F(± √3, 0)

.....G.....3. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1$



V(0, ± 6)
F(0, ± 3√3)

.....B.....4. $2x^2 + 3y^2 = 18$



V(± 10, 0)
F(± 6, 0)

.....D.....5. $100x^2 + 64y^2 - 6400 = 0$



V(± 9, 0)
F(± 4√2, 0)

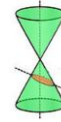


V(0, ± 10)
F(0, ± 6)



V(± 10, 0)
F(± √19, 0)





เฉลยแบบฝึกทักษะ 5.2

วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

ชื่อ.....ชั้น ม. 4 / เลขที่

1. คำชี้แจง ให้นักเรียนเติมข้อความลงในช่องว่างให้ถูกต้องครบถ้วนและสมบูรณ์

1.1 จากสมการวงรี $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ จงเขียนกราฟวงรีและหาส่วนประกอบต่างๆของวงรี

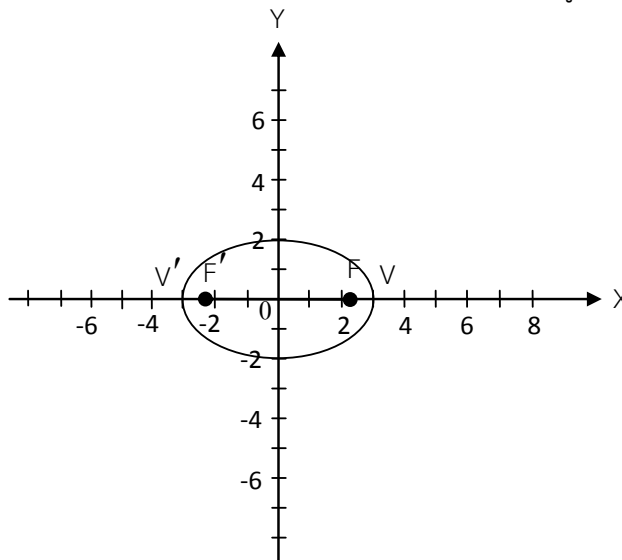
วิธีทำ จาก $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ จะได้ว่า จุดศูนย์กลาง อยู่ที่จุด (0, 0)

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เนื่องจากตัวเลขใต้แกน X มากกว่า

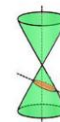
$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a^2 &= 9 \text{ และ } b^2 = 4 \\ a &= 3 \text{ และ } b = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } c^2 &= a^2 - b^2 \\ c^2 &= 9 - 4 \\ c &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

เนื่องจาก แกนเอกคือแกน X เพราะตัวเลขใต้แกน X มากกว่าจะวาดรูปได้ดังนี้



- 1) วงรี มีแกน X เป็นแกนเอก และสมการแกนเอก คือ $y = 0$
มีแกน Y เป็นแกนโท และสมการแกนโท คือ $x = 0$



2) จุดยอด คือ $V(3, 0)$ และ $V'(-3, 0)$

3) จุดโฟกัส คือ $F(\sqrt{5}, 0)$ และ $F'(-\sqrt{5}, 0)$

4) Latus Rectum เท่ากับ $\frac{8}{3}$

2. จากสมการวงรี $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$ จงเขียนกราฟวงรีและหาส่วนประกอบต่างๆของวงรี

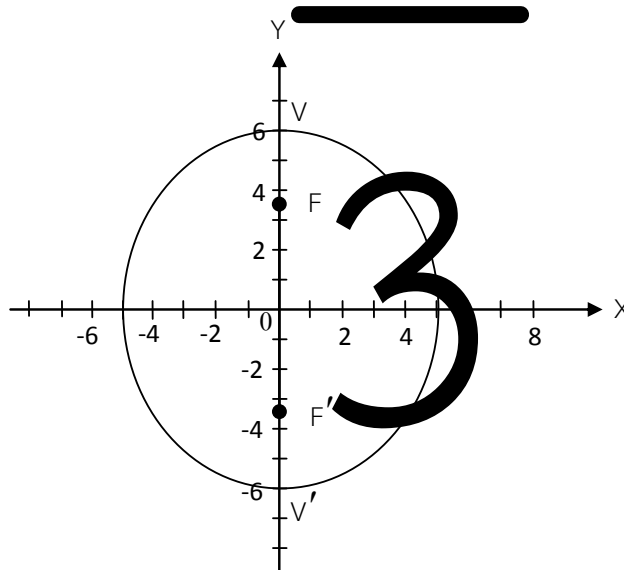
วิธีทำ จาก $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$ จะได้ว่า จุดศูนย์กลาง อยู่ที่จุด $(0, 0)$

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เนื่องจากตัวเลขใต้แกน X มากกว่า

จะได้ $a^2 = 36$ และ $b^2 = 25$
 $a = 6$ และ $b = 5$

และ $c^2 = a^2 - b^2$
 $c^2 = 36 - 25$
 $c = \sqrt{11}$

เนื่องจาก แกนเอกคือแกน Y เพราะตัวเลขใต้แกน Y มากกว่าจะวาดรูปได้ดังนี้



1) วงรี มีแกน Y เป็นแกนเอก และสมการแกนเอก คือ $x = 0$

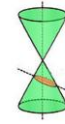
มีแกน X เป็นแกนโท และสมการแกนโท คือ $y = 0$

2) จุดยอด คือ $V(0, 6)$ และ $V'(0, -6)$

3) จุดโฟกัส คือ $F(0, \sqrt{11})$ และ $F'(0, -\sqrt{11})$

4) Latus Rectum = $\frac{2b^2}{a} = \frac{50}{6}$

5) ความเยื้องศูนย์กลาง คือ $e = \frac{\sqrt{11}}{6}$



3. จากสมการวงรี $25x^2 + 9y^2 = 225$ จงเขียนกราฟของวงรี และหาส่วนประกอบต่างๆวงรี

วิธีทำ จาก $25x^2 + 9y^2 = 225$ ปรับสมการโดยนำ 400 หารตลอด

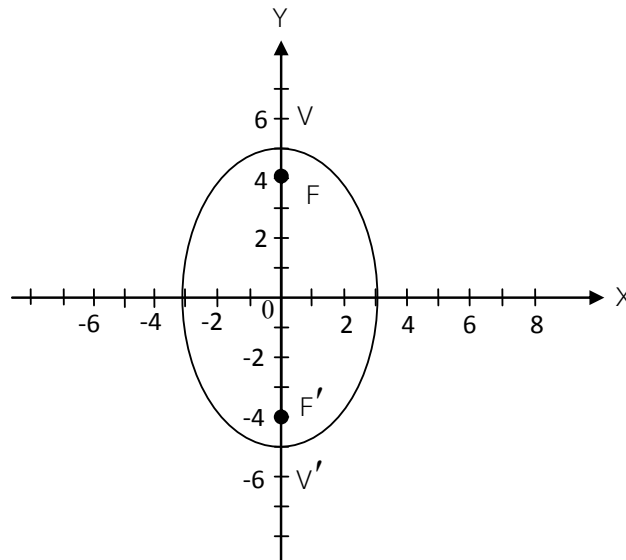
จะได้ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เนื่องจากตัวเลขใต้แกน Y มากกว่า

จะได้ $a^2 = 25$ และ $b^2 = 9$
 $a = 5$ และ $b = 3$

และ $c^2 = a^2 - b^2$
 $c^2 = 25 - 9$
 $c = 4$

เนื่องจาก แกนเอกคือแกน Y เพราะตัวเลขใต้แกน Y มากกว่าจะวาดรูปได้ดังนี้



1) วงรี มีแกน Y เป็นแกนเอก และสมการแกนเอก คือ $x = 0$

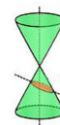
มีแกน X เป็นแกนโท และสมการแกนโท คือ $y = 0$

2) จุดยอด คือ $V(0, 5)$ และ $V'(0, -5)$

3) จุดโฟกัส คือ $F(0, 4)$ และ $F'(0, -4)$

4) Latus Rectun = L.R = $\frac{18}{5}$

5) ความเยื้องศูนย์กลาง คือ $e = \frac{4}{5}$



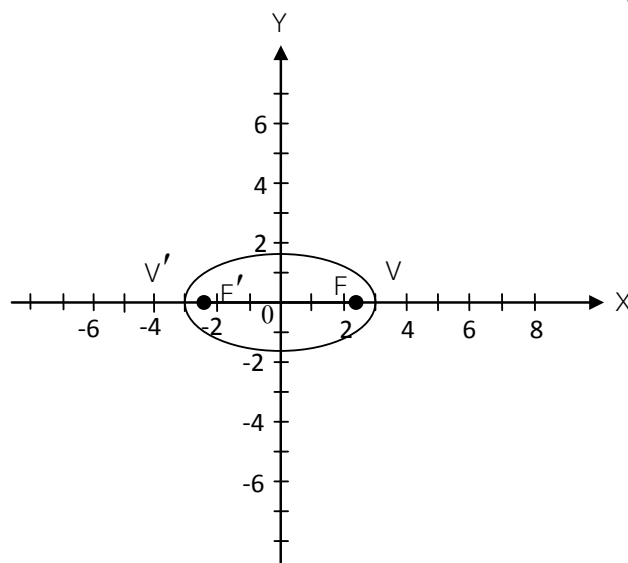
4. จากสมการวงรี $3x^2 + 9y^2 - 27 = 0$ จงเขียนกราฟของวงรี และหาส่วนประกอบ
ต่างๆของวงรี

วิธีทำ จาก $3x^2 + 9y^2 = 27$ ปรับสมการโดยนำ 27 หารตลอด
จะได้ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$
เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เนื่องจากตัวเลขใต้แกน X

จะได้ $a^2 = 9$ และ $b^2 = 3$
 $a = 3$ และ $b = \sqrt{3}$

และ $c^2 = a^2 - b^2$
 $c^2 = 9 - 3$
 $c = \sqrt{6}$

เนื่องจาก แกนเอกคือแกน X เพราะตัวเลขใต้แกน X มากกว่าจะวาดรูปได้ดังนี้



1) วงรี มีแกน X เป็นแกนเอก และสมการแกนเอก คือ $y = 0$

มีแกน Y เป็นแกนโท และสมการแกนโท คือ $x = 0$

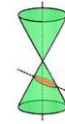
2) จุดยอด คือ $V(3, 0)$ และ $V'(-3, 0)$

3) จุดโฟกัส คือ $F(\sqrt{6}, 0)$ และ $F'(-\sqrt{6}, 0)$

4) Latus Rectum เท่ากับ $\frac{6}{3} = 2$

5) ความเยื้องศูนย์กลาง คือ $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$





เฉลยแบบฝึกทักษะ 5.3

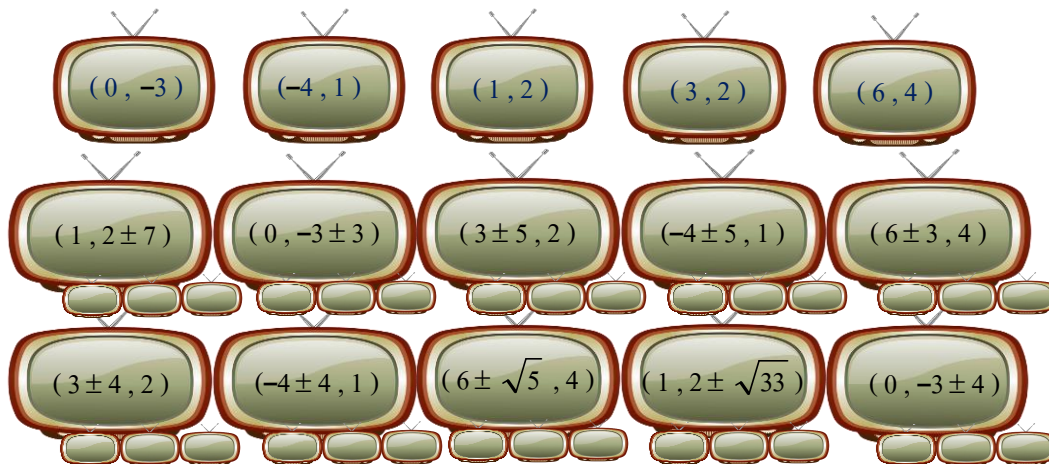
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง ส่วนประกอบต่างๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

ชื่อ.....ชั้น ม. 4 / เลขที่

กำหนดพิกัดจุดให้ดังต่อไปนี้



คำชี้แจง ให้นักเรียนเลือกพิกัดจุดจากด้านบน ที่เป็นจุดศูนย์กลาง จุดยอดและโฟกัสของ

สมการวงรีดังต่อไปนี้เติมลงในช่องว่างให้ถูกต้องครบถ้วน

1. $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{49} = 1$

จุดศูนย์กลาง คือ $(1, 2)$ จุดยอด คือ $(1, 2 \pm 7)$ โฟกัส คือ $(1, 2 \pm \sqrt{33})$

2. $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

จุดศูนย์กลาง คือ $(-4, 1)$ จุดยอด คือ $(-4 \pm 5, 1)$ โฟกัส คือ $(-4 \pm 4, 1)$

3. $\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$

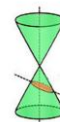
จุดศูนย์กลาง คือ $(6, 4)$ จุดยอด คือ $(6 \pm 3, 4)$ โฟกัส คือ $(6 \pm \sqrt{5}, 4)$

4. $\frac{x^2}{7} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

จุดศูนย์กลาง คือ $(0, -3)$ จุดยอด คือ $(0, -3 \pm 4)$ โฟกัส คือ $(0, -3 \pm 3)$

5. $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$

จุดศูนย์กลาง คือ $(3, 2)$ จุดยอด คือ $(3 \pm 5, 2)$ โฟกัส คือ $(3 \pm 4, 2)$



เฉลยแบบฝึกทักษะ 5.4

วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง ส่วนประกอบต่างๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k)

ชื่อ.....ชั้น ม. 4 / เลขที่

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาส่วนประกอบต่างๆ ของวงรีและวาดกราฟ โดยเติมข้อความลงในช่องว่างให้ถูกต้องครบถ้วน จากสมการวงรีที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

วิธีทำ ได้ว่า แกนเอก ขนานกับแกน X (เลขใต้แกน X มากกว่า)

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้ $a^2 = 9$ และ $b^2 = 4$
 $a = 3$ และ $b = 2$

และ $c^2 = 9 - 4$
 $c = \sqrt{5}$

1.1 สมการแกนเอก คือ $y - 3 = 0$

1.2 สมการแกนโท คือ $x - 2 = 0$

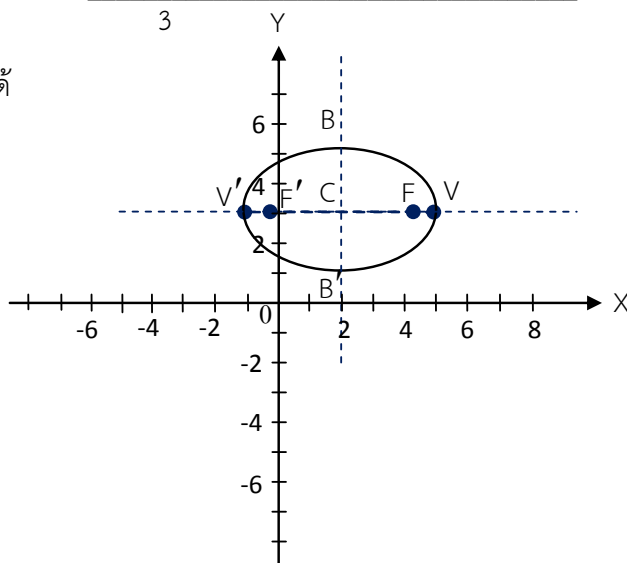
1.3 จุดศูนย์กลาง คือ (2, 3)

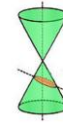
1.4 จุดยอด คือ $V(5, 3)$ และ $V'(-1, 3)$

1.5 จุดโฟกัส คือ $F(2 + \sqrt{5}, 3)$ และ $F'(2 - \sqrt{5}, 3)$

1.6 Latus Rectum เท่ากับ $\frac{8}{3}$

จะวาดกราฟได้





2. $16(x - 2)^2 + 25(y + 3)^2 - 400 = 0$

วิธีทำ ปรับสมการให้เข้ารูปแบบมาตรฐาน

จะได้ $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$ (นำ 400หารตลอด)

ได้ว่า แกนเอก _____ ขนานกับแกน X (เลขใต้แกน X มากกว่า)

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้ $a^2 = 25$ และ $b^2 = 16$
 $a = 5$ และ $b = 4$

และ $c^2 = 25 - 16$
 $c = 3$

2.1 สมการแกนเอก คือ $y + 3 = 0$

2.2 สมการแกนโท คือ $x - 2 = 0$

2.3 จุดศูนย์กลาง คือ $(2, -3)$

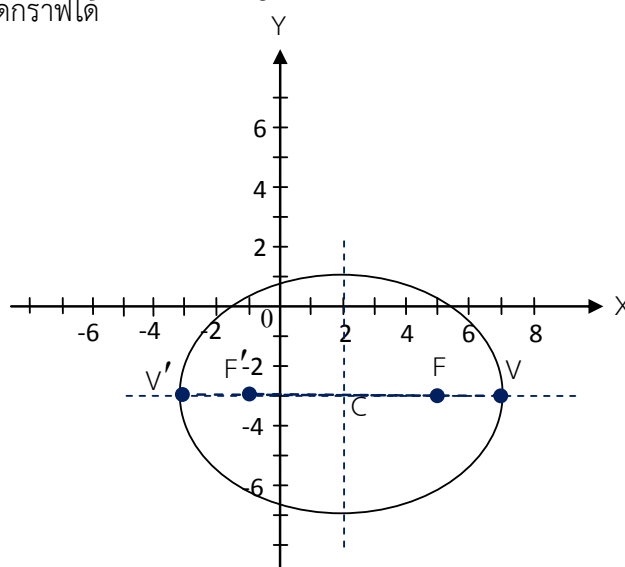
2.3 จุดยอด คือ $V(-3, -3)$ และ $V'(7, -3)$

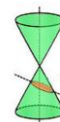
2.4 จุดโฟกัส คือ $F(5, -3)$ และ $F'(-1, -3)$

2.5 Latus Rectum เท่ากับ $\frac{32}{5}$

2.6 ความเยื้องศูนย์กลาง คือ $\frac{3}{5}$

จะวาดกราฟได้





3. $9x^2 + 5y^2 - 18x + 30y + 9 = 0$

วิธีทำ จากรูปทั่วไป ทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ซึ่งอยู่ในรูปมาตรฐาน

$$(9x^2 - 18x) + (5y^2 + 30y) = -9$$

$$9(x^2 - 2x + 1^2) + 5(y^2 + 6y + 3^2) = -9 + 9(1^2) + 5(3^2)$$

$$9(x-1)^2 + 5(y+3)^2 = 45$$

$$\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

จะได้ว่า แกนเอก ขนานกับแกน Y (เลขใต้แกน Y มากกว่า)

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

จะได้ $a^2 = 9$ และ $b^2 = 5$
 $a = 3$ และ $b = \sqrt{5}$

และ $c^2 = 9 - 5$
 $c = 2$

3.1 สมการแกนเอก คือ $x - 1 = 0$

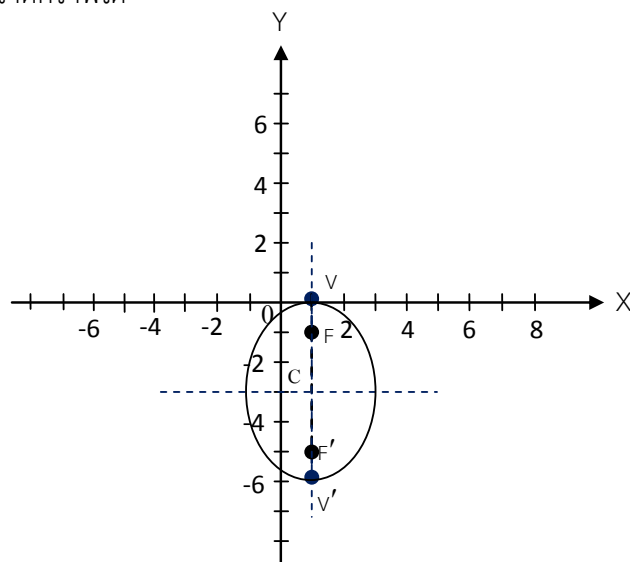
3.2 สมการแกนโท คือ $y + 3 = 0$

3.3 จุดศูนย์กลาง คือ $(1, -3)$

3.4 จุดยอด คือ $V(1, 0)$ และ $V'(1, -6)$

3.5 จุดโฟกัส คือ $F(1, -1)$ และ $F'(1, -5)$

จะวาดกราฟได้



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ศ31202

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ภาคตัดกรวย

เวลา 19 ชั่วโมง

เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรี

เวลา 1 ชั่วโมง

สอนวันที่ 30 เดือน พฤศจิกายน พ.ศ. 2559

ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559

ผู้สอน นายประยุทธ์ ธนากาญจน์ภาส

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยง คณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ผลการเรียนรู้

1. เขียนกราฟและหาส่วนต่าง ๆ ของวงรีเมื่อกำหนดความสัมพันธ์ของกราฟวงรีให้ได้

สาระสำคัญ

ภาคตัดกรวย (Conic Section) หมายถึง เส้นโค้ง ซึ่ง ได้แก่ วงกลม (circle) พาราโบลา (parabola) วงรี (ellipse) และไฮเพอร์โบลา (hyperbola) ที่เกิดจากการนำระนาบไปตัดกรวย กลมตรง

วงรี (ellipse) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยัง จุด F_1 และ F_2 ที่ตรึงอยู่กับที่ มีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ ทั้งสองจุด จุดสองจุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **โฟกัส (focus)** ของวงรี

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

- 1) หาส่วนประกอบต่างๆ ของวงรีที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ ได้อย่างถูกต้อง
- 2) เปลี่ยนสมการวงรีในรูปทั่วไปให้เป็นรูปมาตรฐาน และบอกส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดให้ได้

ด้านทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

- 1) การมีระเบียบวินัย
- 2) ความตรงต่อเวลา

สาระการเรียนรู้

1) ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0)

1.1) สมการวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b > 0$ และ $b^2 = a^2 - c^2$ จะมีจุด

ศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) แกนเอกอยู่บนแกน x โฟกัสอยู่ที่ (c, 0) และ (-c, 0) จุดยอดอยู่ที่จุด (a, 0) และ (-a, 0)

1.2) สมการวงรี $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เมื่อ $a > b > 0$ และ $b^2 = a^2 - c^2$ จะมีจุด

ศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) แกนเอกอยู่บนแกน y โฟกัสอยู่ที่ (0, c) และ (0, -c) จุดยอดอยู่ที่จุด (0, a) และ (0, -a)

กิจกรรมการเรียนรู้ (การเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD)

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้
2. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 6.1 เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างค่า a, b และ c
3. ให้นักเรียนตอบคำถาม เพื่อสรุปประเด็นข้อคิดที่ได้ดังนี้
 - ความสัมพันธ์ระหว่างค่า a, b และ c เป็นอย่างไร
 - การหาค่าตัวแปรที่เหลือ นักเรียนมีวิธีหาได้อย่างไร
4. นักเรียนร่วมกันสรุปว่า “ความสัมพันธ์ระหว่างค่า a, b และ c คือ $a^2 = b^2 + c^2$ และในการหาค่า c^2 ก็ต้องเปลี่ยนความสัมพันธ์เป็น $c^2 = a^2 - b^2$ หรือถ้าเราจะหา b^2 ก็ต้องเปลี่ยนความสัมพันธ์เป็น $b^2 = a^2 - c^2$ (ในส่วนของการหาค่า a, b และ c นั้นทำได้โดยการหารากที่สองของ a^2 , b^2 และ c^2 นั้นเอง)

ขั้นที่ 2 ขั้นการเสนอบทเรียนต่อทั้งชั้น

1. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 6.2 เรื่อง ส่วนประกอบที่สำคัญของวงรี และให้นักเรียนตอบคำถามเพื่อสรุปประเด็นข้อคิดที่ได้ดังนี้
 - รูปวงรีที่กำหนดให้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ไหน
 - ถ้าแกนเอกอยู่บนแกน X หรือ แกน Y ลักษณะของวงรีเป็นอย่างไร
 - ถ้าวงรีแนวนอน จะมีสมการในรูปทั่วไปเป็นอย่างไร
 - ถ้าวงรีแนวตั้ง จะมีสมการในรูปทั่วไปเป็นอย่างไร
 - ลักษณะของจุดยอดและโฟกัสเป็นอย่างไร
2. นักเรียนร่วมกันสรุปใบกิจกรรมที่ 6.2 ส่วนประกอบที่สำคัญของวงรี ว่าวงรีที่กำหนดให้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) แกนเอกอยู่บนแกน X จะเป็นวงรีแนวนอน แต่ถ้าแกนเอกอยู่บนแกน Y จะเป็นวงรีแนวตั้ง วงรีแนวนอนจะมีสมการในรูปมาตรฐานคือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ส่วนวงรีแนวตั้งจะมี

สมการในรูปมาตรฐาน คือ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ถ้าแกนเอกอยู่บนแกน X จะทำให้จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน X ด้วย เช่นเดียวกัน ถ้าแกนเอกอยู่บนแกน Y ก็จะทำให้จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y ด้วย

3. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 6.3 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี

4. ให้นักเรียนร่วมกันอภิปราย หลักการหาส่วนประกอบของวงรี ว่า จากสมการในรูปมาตรฐานที่กำหนดมาให้ เราต้องรู้ว่าเป็นวงรีแนวไหน โดยดูจากตัวเลขที่เป็นตัวส่วนของ x^2 และ y^2

- ถ้าตัวเลขมากอยู่ใต้ x^2 แสดงว่าตัวเลขนั้นคือ a^2 ซึ่งจะเป็นวงรีแนวนอน ส่วน b^2 ก็คือตัวเลขที่อยู่ใต้ y^2 หลังจากนั้นก็หาค่า a , b และ c จากความสัมพันธ์ $a^2 = b^2 + c^2$ แล้วนำไปใช้หาค่าส่วนประกอบของวงรี

- ถ้าตัวเลขมากอยู่ใต้ y^2 แสดงว่าตัวเลขนั้นคือ a^2 ซึ่งจะเป็นวงรีแนวนอน ส่วน b^2 ก็คือตัวเลขที่อยู่ใต้ x^2 หลังจากนั้นก็หาค่า a , b และ c จากความสัมพันธ์ $a^2 = b^2 + c^2$ แล้วนำไปใช้หาค่าส่วนประกอบของวงรี

ขั้นที่ 3 ขั้นสรุป

1. ให้นักเรียนร่วมกันสรุป ว่า วงรีที่มีศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ แกนเอกอยู่บนแกน X จะเป็นวงรีแนวนอน แต่ถ้าแกนเอกอยู่บนแกน Y จะเป็นวงรีแนวตั้ง วงรีแนวนอนจะมีสมการในรูปมาตรฐานไป คือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ส่วนวงรีแนวตั้งจะมีสมการในรูปมาตรฐานคือ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ถ้าแกนเอก

อยู่บนแกน X จะทำให้จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน X ด้วย เช่นเดียวกัน ถ้าแกนเอกอยู่บนแกน Y ก็จะทำให้จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y ด้วย

2. ให้นักเรียนร่วมกันสรุป วิธีการหาส่วนประกอบของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ โดยมีแนวตอบดังนี้

ในการหาส่วนประกอบของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ นักเรียนจะต้องรู้ว่าเป็นวงรีแนวไหน และก็ต้องหาค่า a และ b จากสมการรูปมาตรฐานที่โจทย์กำหนดให้ และใช้ความสัมพันธ์ $a^2 = b^2 + c^2$ หาค่า c ให้ได้ เพื่อนำไปใช้ในการหาส่วนประกอบต่าง ๆ แต่ถ้าสมการอยู่ในรูปทั่วไปเราต้องปรับสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐานเสียก่อน

ขั้นที่ 4 ขั้นการศึกษากลุ่มย่อย

1. นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 5.1 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี ให้นักเรียนทำงานโดยมีการอ้างอิงเหตุและผลที่ถูกต้อง ชัดเจน เสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจได้อย่างสมเหตุสมผล มีวิธีการแก้ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพ และแก้ไขปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างสำเร็จลุล่วง อธิบายเหตุผลในการใช้วิธีการดังกล่าวได้ ชัดเจน โดยคนเก่งช่วยเหลือคนที่อ่อนกว่า ขณะเดียวกันครูคอยให้คำแนะนำช่วยเหลือเมื่อนักเรียนมีปัญหา

2. เมื่อนักเรียนศึกษาใบความรู้เข้าใจแล้ว ให้นักเรียนแต่ละคน ทำแบบฝึกทักษะที่ 5.1 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ และแบบฝึกทักษะที่ 5.2 เรื่อง ส่วนประกอบ

ต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี ครูกระตุ้นให้นักเรียนเน้นการอภิปรายกลุ่ม โดยช่วยเหลือซึ่งกันและกัน รับผิดชอบในการเรียนรู้ของตนเอง ทำงาน สะอาดเรียบร้อย และมีความถูกต้อง ปฏิบัติตนอยู่ในข้อตกลงที่กำหนดให้ทำร่วมกันทุกครั้ง ส่งงานตามกำหนดนัดหมาย ปฏิบัติงานที่ได้รับมอบหมายด้วยตนเอง เป็นแบบอย่างที่ดีให้กับเพื่อน แนะนำเพื่อนให้ปฏิบัติตามได้

3. ครูแจกเฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.1 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ และแบบฝึกทักษะที่ 5.2 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี โดยเปลี่ยนกันตรวจระหว่างกลุ่ม ถ้าผิดข้อใดให้สมาชิกในกลุ่มศึกษาข้อผิดพลาดและทำความเข้าใจร่วมกัน

สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมที่ 6.1 เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างค่า a , b และ c
4. บัตรเฉลยใบกิจกรรมที่ 6.1 เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างค่า a , b และ c
5. ใบกิจกรรมที่ 6.2 เรื่อง ส่วนประกอบที่สำคัญของวงรี
4. ใบกิจกรรมที่ 6.3 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี
6. ใบความรู้ที่ 5.1 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี
7. แบบฝึกทักษะ ที่ 5.1 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี
8. แบบฝึกทักษะ ที่ 5.2 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี

การวัดผลและประเมินผล

1. วิธีการวัด

- 1.1 ตรวจแบบฝึกทักษะที่ 5.1 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$
- 1.2 ตรวจแบบฝึกทักษะที่ 5.2 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$
- 1.3 สังเกตพฤติกรรม เพื่อประเมินทักษะ/กระบวนการ
- 1.4 สังเกตพฤติกรรม เพื่อประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์

2. เครื่องมือวัด

- 2.1 แบบฝึกทักษะ
- 2.2 แบบประเมินทักษะ/กระบวนการ
- 2.3 แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์

3. เกณฑ์การประเมิน

3.1 นักเรียนสามารถทำแบบฝึกทักษะเล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี ได้ถูกต้อง ไม่น้อยกว่าร้อยละ 75 ถือว่าผ่านเกณฑ์

3.2 นักเรียนผ่านเกณฑ์การประเมินด้วยแบบประเมินทักษะ/กระบวนการ ไม่น้อยกว่า ร้อยละ 75 ถือว่าผ่านเกณฑ์

3.3 นักเรียนผ่านเกณฑ์การประเมินด้วยแบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ไม่น้อยกว่า ร้อยละ 75 ถือว่าผ่านเกณฑ์

ใบกิจกรรมที่ 6.1

ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 ส่วนประกอบของวงรี

เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างค่า a , b และ c

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค31202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ภาคตัดกรวย

ชื่อ..... ชั้น.....คะแนนที่ได้.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาความสัมพันธ์ของค่า a , b และ c ในข้อที่ 1 และเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

ข้อ 1	$a^2 = 25$	$b^2 = 9$	$c^2 = 16$
ข้อ 2	$a^2 = 49$	$b^2 =$	$c^2 = 13$
ข้อ 3	$a^2 = 25$	$b^2 = 16$	$c =$
ข้อ 4	$a = 5$	$b^2 = 9$	$c =$
ข้อ 5	$a =$	$b = 8$	$c = 6$
ข้อ 6	$a^2 = 100$	$b^2 =$	$c^2 = 36$
ข้อ 7	$a^2 =$	$b^2 = 64$	$c^2 = 36$
ข้อ 8	$a^2 = 100$	$b^2 = 36$	$c =$
ข้อ 9	$a = 10$	$b^2 =$	$c = 8$
ข้อ 10	$a = 6$	$b = 4$	$c =$

สรุปความสัมพันธ์ระหว่างค่า a , b และ c จะได้ว่า

.....

.....

.....

.....

.....

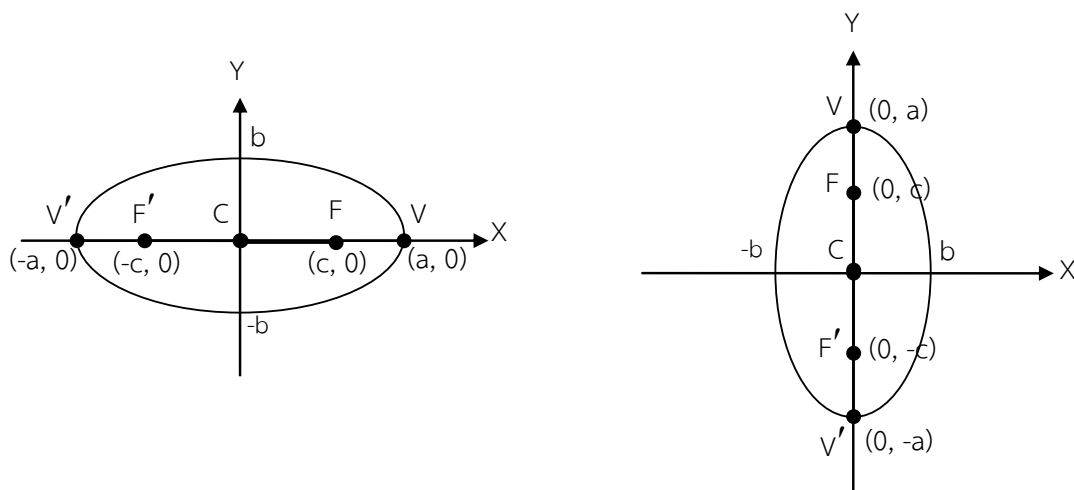
ใบกิจกรรมที่ 6.2

ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 ส่วนประกอบของวงรี

เรื่อง ส่วนประกอบที่สำคัญของวงรี

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค31202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ภาคตัดกรวย

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณารูปและตารางแสดงจุดสำคัญของวงรีต่อไปนี้ แล้วเขียนสรุปความรู้ที่ได้



สมการรูปแบบมาตรฐาน	จุดศูนย์กลาง	แกนเอก	จุดยอด	โฟกัส
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	(0, 0)	แกน X	V (±a, 0)	F (±c, 0)
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	(0, 0)	แกน Y	V (0, ±a)	F (0, ±c)

ข้อสรุปความรู้เกี่ยวกับ “ ลักษณะและส่วนที่สำคัญของวงรี ”

.....

.....

.....

.....

ใบกิจกรรมที่ 6.3

ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 ส่วนประกอบของวงรี

เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค31202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ภาคตัดกรวย

คำชี้แจง

ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ แล้วเขียนสรุปความรู้ที่ได้เกี่ยวกับการหาส่วนประกอบของวงรี

ตัวอย่างที่ 1 จากสมการวงรี $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ จงหาจุดยอดและโฟกัสของวงรี

วิธีทำ จาก $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ จะได้ว่า จุดศูนย์กลาง อยู่ที่จุด (0, 0)

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เนื่องจากตัวเลขใต้แกน X มากกว่า

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a^2 &= 100 \text{ และ } b^2 = 64 \\ a &= 10 \text{ และ } b = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } c^2 &= a^2 - b^2 \\ c^2 &= 100 - 64 \\ c &= 6 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

1. วงรี มีแกน X เป็นแกนเอก และสมการแกนเอก คือ $y = 0$
มีแกน Y เป็นแกนโท และสมการแกนโท คือ $x = 0$
2. จุดยอด คือ V ($\pm 10, 0$)
3. โฟกัส คือ F ($\pm 6, 0$)

ตัวอย่างที่ 2 จากสมการวงรี $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ จงหาจุดยอดและโฟกัสของวงรี

วิธีทำ จาก $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ จะได้ว่า จุดศูนย์กลาง อยู่ที่จุด (0, 0)

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เนื่องจากตัวเลขใต้แกน Y มากกว่า

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a^2 &= 5^2 \text{ และ } b^2 = 4^2 \\ &= 5 \text{ และ } b = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } c^2 &= a^2 - b^2 \\ c^2 &= 25 - 16 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

1. วงรี มีแกน Y เป็นแกนเอก และสมการแกนเอก คือ $x = 0$
มีแกน X เป็นแกนโท และสมการแกนโท คือ $y = 0$
2. จุดยอด คือ $V (\pm 5, 0)$
3. โฟกัส คือ $F (\pm 3, 0)$

ตัวอย่างที่ 3 จากสมการวงรี $169x^2 + 144y^2 = 24,336$ จงหาส่วนประกอบต่างๆวงรี

วิธีทำ จาก $169x^2 + 144y^2 = 24,336$ ปรับสมการโดยนำ 24,336 หารตลอด

จะได้ $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เนื่องจากตัวเลขใต้แกน Y มากกว่า

จะได้ $a^2 = 169$ และ $b^2 = 144$
 $a = 13$ และ $b = 12$

และ $c^2 = a^2 - b^2$
 $c^2 = 169 - 144$
 $c = 5$

จะได้ว่า

1. วงรี มีแกน Y เป็นแกนเอก และสมการแกนเอก คือ $x = 0$
มีแกน X เป็นแกนโท และสมการแกนโท คือ $y = 0$
2. จุดยอด คือ $V (0, \pm 13)$
3. โฟกัส คือ $F (0, \pm 5)$
4. Latus Rectum = L.R = $\frac{2b^2}{a} = \frac{144}{13}$
5. ความเยื้องศูนย์กลาง คือ $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$

ข้อสรุปความรู้เกี่ยวกับ “ การหาส่วนประกอบของวงรี ”

.....

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ศ31202

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ภาคตัดกรวย

เวลา 19 ชั่วโมง

เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรี(ต่อ)

เวลา 1 ชั่วโมง

สอนวันที่ 1 เดือน ธันวาคม พ.ศ. 2559

ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559

ผู้สอน นายประยุทธ์ ธนากาญจน์ภาส

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยง คณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ผลการเรียนรู้

1. เขียนกราฟและหาส่วนต่าง ๆ ของวงรีเมื่อกำหนดความสัมพันธ์ของกราฟวงรีให้ได้

สาระสำคัญ

ภาคตัดกรวย (Conic Section) หมายถึง เส้นโค้ง ซึ่ง ได้แก่ วงกลม(circle) พาราโบลา (parabola) วงรี (ellipse) และไฮเพอร์โบลา (hyperbola) ที่เกิดจากการนำระนาบไปตัดกรวย กลมตรง

วงรี (ellipse) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยัง จุด F_1 และ F_2 ที่ตรึงอยู่กับที่ มีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ ทั้งสองจุด จุดสองจุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า โฟกัส(focus)ของวงรี

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

- 1) หาส่วนประกอบต่างๆ ของวงรีที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ได้อย่างถูกต้อง
- 2) เปลี่ยนสมการวงรีในรูปทั่วไปให้เป็นรูปมาตรฐาน และบอกส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ให้ได้

ด้านทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

- 1) การมีระเบียบวินัย
- 2) ความตรงต่อเวลา

สาระการเรียนรู้

- 1) ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

$$1.1) \text{ สมการวงรี } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ เมื่อ } a > b > 0 \text{ และ } b^2 = a^2 - c^2$$

จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) แกนเอกขนานกับแกน x โฟกัสอยู่ที่ $(h + c, k)$ และ $(h - c, k)$
จุดยอดอยู่ที่จุด $(h + a, k)$ และ $(h - a, k)$

$$1.2) \text{ สมการวงรี } \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \text{ เมื่อ } a > b > 0 \text{ และ } b^2 = a^2 - c^2$$

จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) แกนเอกขนานกับแกน y โฟกัสอยู่ที่ $(h, k + c)$ และ $(h, k - c)$
จุดยอดอยู่ที่จุด $(h, k + a)$ และ $(h, k - a)$

กิจกรรมการเรียนรู้ (การเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD)

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้
2. ให้นักเรียนดูคลิปวิดีโอ จากอินเทอร์เน็ต ในเว็บไซต์ www.youtube.com เพลง อ้าว..วงรี ซึ่งมีเนื้อหาของเพลงที่เกี่ยวกับการสรุปบทเรียน เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี เมื่อนักเรียนดูจบ ครูและนักเรียนสนทนาทบทวนความรู้เดิม ด้วยการสรุปการหาส่วนประกอบวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ นักเรียนช่วยกันร้องเพลงอีก 1 รอบพร้อมกับช่วยกันปรบมือให้จังหวะไปด้วย
3. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 7.1 เรื่อง ส่วนประกอบที่สำคัญของวงรี และให้นักเรียนตอบคำถามเพื่อสรุปประเด็นข้อคิดที่ได้ดังนี้

- รูปวงรีที่กำหนดให้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ไหน
- ถ้าแกนเอกขนานกับแกน X หรือ ขนานกับแกน Y ลักษณะของวงรีเป็นอย่างไร
- ถ้าวงรีแนวนอน จะมีสมการในรูปทั่วไปเป็นอย่างไร
- ถ้าวงรีแนวตั้ง จะมีสมการในรูปทั่วไปเป็นอย่างไร
- ลักษณะของจุดยอดและโฟกัสเป็นอย่างไร

4. นักเรียนร่วมกันสรุปใบกิจกรรมที่ 7.1 ส่วนประกอบที่สำคัญของวงรี ว่าวงรีที่กำหนดให้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนเอกขนานกับแกน X จะเป็นวงรีแนวนอน แต่ถ้าแกนเอกขนานกับแกน Y จะเป็นวงรีแนวตั้ง วงรีแนวนอนจะมีสมการในรูปมาตรฐานคือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ส่วนวงรี

แนวตั้งจะมีสมการในรูปมาตรฐาน คือ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ ถ้าแกนเอกขนานกับ X จะได้ว่าจุดยอดอยู่ที่ $(h \pm a, k)$ และโฟกัสอยู่ที่ $(h \pm c, k)$ เช่นเดียวกัน ถ้าแกนเอกขนานกับแกน Y ก็จะได้ว่าจุดยอดอยู่ที่ $(h, k \pm a)$ และโฟกัสอยู่ที่ $(h, k \pm c)$

ขั้นที่ 2 ขั้นการเสนอบทเรียนต่อทั้งชั้น

1. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 7.2 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

2. ให้นักเรียนร่วมกันอภิปราย หลักการหาส่วนประกอบของวงรี ว่า จากสมการในรูปมาตรฐานที่กำหนดมาให้ เราต้องรู้ว่าเป็นวงรีแนวไหน โดยดูจากตัวเลขที่เป็นตัวส่วนของ $(x - h)^2$ และ $(y - k)^2$

- ถ้าตัวเลขมากอยู่ใต้ $(x - h)^2$ แสดงว่าตัวเลขนั้นคือ a^2 ซึ่งจะเป็นวงรีแนวนอน ส่วน b^2 ก็คือตัวเลขที่อยู่ใต้ $(y - k)^2$ หลังจากนั้นก็หาค่า a , b และ c จากความสัมพันธ์ $a^2 = b^2 + c^2$ แล้วนำไปใช้หาค่าส่วนประกอบของวงรีที่เหลือ

- ถ้าตัวเลขมากอยู่ใต้ $(y - k)^2$ แสดงว่าตัวเลขนั้นคือ a^2 ซึ่งจะเป็นวงรีแนวนอน ส่วน b^2 ก็คือตัวเลขที่อยู่ใต้ $(x - h)^2$ หลังจากนั้นก็หาค่า a , b และ c จากความสัมพันธ์ $a^2 = b^2 + c^2$ แล้วนำไปใช้หาค่าส่วนประกอบของวงรีที่เหลือ

ขั้นที่ 3 ขั้นสรุป

1. ให้นักเรียนร่วมกันสรุป ว่า วงรีที่มีศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนเอกขนานกับแกน X จะเป็นวงรีแนวนอน แต่ถ้าแกนเอกขนานกับแกน Y จะเป็นวงรีแนวตั้ง วงรีแนวนอนจะมีสมการในรูปมาตรฐานไป คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ส่วนวงรีแนวตั้งจะมีสมการในรูปมาตรฐาน

คือ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ ถ้าแกนเอกขนานกับแกน X จะได้ว่าจุดยอดอยู่ที่ $(h \pm a, k)$ และโฟกัสอยู่ที่ $(h \pm c, k)$ เช่นเดียวกัน ถ้าแกนเอกขนานกับแกน Y ก็จะได้ว่าจุดยอดอยู่ที่ $(h, k \pm a)$ และโฟกัสอยู่ที่ $(h, k \pm c)$

2. ให้นักเรียนร่วมกันสรุป วิธีการหาส่วนประกอบของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) โดยมีแนวตอบดังนี้

ในการหาส่วนประกอบของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) นักเรียนจะต้องรู้เป็นวงรีแนวไหน โดยการดูตัวเลขที่เป็นตัวส่วนของ $(x - h)^2$ กับ $(y - k)^2$ ว่าตัวไหนมีค่ามากกว่า ถ้าตัวส่วนที่อยู่ใต้ $(x - h)^2$ มีค่ามากกว่า แสดงว่าแกนเอกขนานกับแกน X ถ้าตัวส่วนที่อยู่ใต้ $(y - k)^2$ มีค่ามากกว่า แสดงว่าแกนเอกขนานกับแกน Y และก็ต้องหาค่า a และ b จากสมการรูปมาตรฐานที่โจทย์กำหนดให้ และใช้ความสัมพันธ์ $a^2 = b^2 + c^2$ หาค่า c ให้ได้ เพื่อนำไปใช้ในการหาส่วนประกอบต่าง ๆ แต่ถ้าสมการอยู่ในรูปทั่วไปเราต้องปรับสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐานเสียก่อน

ขั้นที่ 4 ขั้นการศึกษากลุ่มย่อย

1. นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 5.2 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี ให้นักเรียนทำงานโดยมีการอ้างอิงเหตุและผลที่ถูกต้อง ชัดเจน เสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจได้อย่างสมเหตุสมผล มีวิธีการแก้ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพ และแก้ไขปัญหาต่างๆได้อย่างสำเร็จลุล่วง อธิบายเหตุผลในการใช้วิธีการดังกล่าวได้ ชัดเจน โดยคนเก่งช่วยเหลือคนที่อ่อนกว่า ขณะเดียวกันครูคอยให้คำแนะนำช่วยเหลือเมื่อนักเรียนมีปัญหา

2. เมื่อนักเรียนศึกษาใบความรู้เข้าใจแล้ว ให้นักเรียนแต่ละคน ทำแบบฝึกทักษะที่ 5.3 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) และแบบฝึกทักษะที่ 5.4 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี ครูกระตุ้นให้นักเรียนเน้นการอภิปรายกลุ่ม โดยช่วยเหลือซึ่งกันและกัน รับผิดชอบในการเรียนรู้ของตนเอง ทำงาน สะอาดเรียบร้อย และมีความถูกต้อง ปฏิบัติตนอยู่ในข้อตกลงที่กำหนดให้ทำร่วมกันทุกครั้ง ส่งงานตามกำหนดนัดหมาย ปฏิบัติงานที่ได้รับมอบหมายด้วยตนเอง เป็นแบบอย่างที่ดีให้กับเพื่อน แนะนำเพื่อนให้ปฏิบัติตามได้

3. ครูแจกเฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.3 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) และแบบฝึกทักษะที่ 5.4 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี โดยเปลี่ยนกันตรวจระหว่างกลุ่ม ถ้าผิดข้อใดให้สมาชิกในกลุ่มศึกษาข้อผิดพลาดและทำความเข้าใจร่วมกัน

สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. คลิปวิดีโอ ใน youtube เพลง อ้าว เวอร์ชั่น วงรี
2. ใบกิจกรรมที่ 7.1 เรื่อง ส่วนประกอบที่สำคัญของวงรี
3. ใบกิจกรรมที่ 7.2 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)
4. ใบความรู้ที่ 5.2 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) ในแบบฝึก

ทักษะเล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี

5. แบบฝึกทักษะ ที่ 5.3 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี
6. แบบฝึกทักษะ ที่ 5.4 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี

การวัดผลและประเมินผล

1. วิธีการวัด

- 1.1 ตรวจแบบฝึกทักษะที่ 5.3 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k)
- 1.2 ตรวจแบบฝึกทักษะที่ 5.4 เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k)
- 1.3 สังเกตพฤติกรรม เพื่อประเมินทักษะ/กระบวนการ
- 1.4 สังเกตพฤติกรรม เพื่อประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์

2. เครื่องมือวัด

- 2.1 แบบฝึกทักษะ
- 2.2 แบบประเมินทักษะ/กระบวนการ
- 2.3 แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์

3. เกณฑ์การประเมิน

3.1 นักเรียนสามารถทำแบบฝึกทักษะเล่มที่ 5 เรื่อง ส่วนประกอบของวงรี ได้ถูกต้อง ไม่น้อยกว่าร้อยละ 75 ถือว่าผ่านเกณฑ์

3.2 นักเรียนผ่านเกณฑ์การประเมินด้วยแบบประเมินทักษะ/กระบวนการ ไม่น้อยกว่า ร้อยละ 75 ถือว่าผ่านเกณฑ์

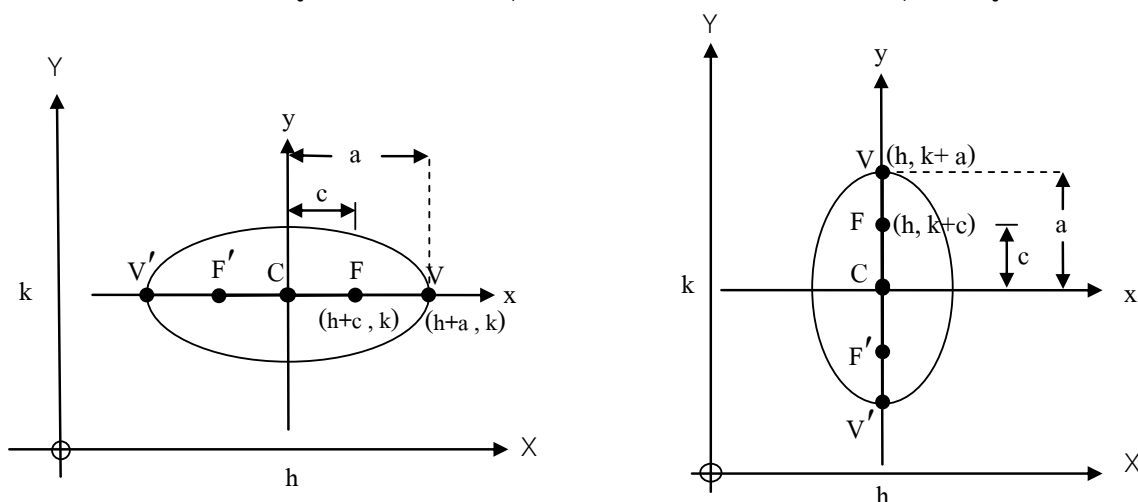
3.3 นักเรียนผ่านเกณฑ์การประเมินด้วยแบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ไม่น้อยกว่า ร้อยละ 75 ถือว่าผ่านเกณฑ์

เนื้อเพลง อ้าว เวอร์ชัน วรี

เรื่องวรี มีส่วนประกอบอยู่ แปรอย่างรวมตัวเข้าด้วยกัน
 จุดศูนย์กลางเหมือนวงกลม จุดโฟกัสคือค่า c จุดยอดก็คือ V ค่า a
 มีสองแกน แกนที่ยาว เรียกว่าแกนเอก แกนโทก็สั้นกว่า
 แกนโทมีค่าสองปี แกนเอกมีค่าสองเอ ต่างกันที่ค่า เอ และปี
 ก็ตอนนั้น เนื้อหายังง่ายอยู่ อยู่ ๆ อะไรลาตัสเรกตัม มาจากไหน
 อ้อ มันคือ สองปีกำลังสอง ส่วนเอ นั่นไง แล้วครูก็ออกอยากไป
 ยังจำได้ไหมเพื่อนรัก
 อ้าวเห้ย ไม่เหมือนที่ครูสอนไว้นี่นา ที่บอกจะออกที่เรียน
 แล้วทำไมไปออกส่วนไหน
 อ้าวเห้ย ข้อสอบไม่เห็นจะง่ายเลยหว่า อย่ามัวเสียเวลานั่งทำอะไร
 มาจำสูตรนี้เลยทุกคน

ใบกิจกรรมที่ 7.1
ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 ส่วนประกอบของวงรี
เรื่อง ส่วนประกอบต่างๆของวงรี
 วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค31202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ภาคตัดกรวย

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณารูปและตารางแสดงจุดสำคัญของวงรีต่อไปนี้ แล้วเขียนสรุปความรู้ที่ได้



สมการรูปแบบมาตรฐาน	จุดศูนย์กลาง	แกนเอก	จุดยอด	โฟกัส
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	(h, k)	ขนานกับแกน X	V (h±a, k)	F (h±c, k)
$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	(h, k)	ขนานกับแกน Y	V (h, k±a)	F (h, k±c)

ข้อสรุปความรู้เกี่ยวกับ “ ลักษณะและส่วนที่สำคัญของวงรี ”

.....

.....

.....

.....

ใบกิจกรรมที่ 7.2

ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 ส่วนประกอบของวงรี(ต่อ)

เรื่อง ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด(h, k)

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค31202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ภาคตัดกรวย

คำชี้แจง

ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ แล้วเขียนสรุปความรู้ที่ได้เกี่ยวกับการหาส่วนประกอบของวงรี

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอดและจุดโฟกัสของวงรี $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

วิธีทำ จะได้ว่า แกนเอก ขนานกับแกน X (เลขใต้แกน X มากกว่า)

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad a^2 &= 25, \quad a = 5 & \text{และ} \quad c^2 &= 25 - 16 \\ b^2 &= 16, \quad b = 4 & \text{และ} \quad c &= 3 \end{aligned}$$

จุดศูนย์กลาง คือ (2, 1)

จุดยอด คือ V(2±5, 1) หรือ (7, 1) และ (-3, 1)

และ โฟกัส คือ F(2±3, 1) หรือ (5, 1) และ (-1, 1)

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอดและจุดโฟกัสของวงรี $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1$

วิธีทำ จะได้ว่า แกนเอก ขนานกับแกน Y (เลขใต้แกน Y มากกว่า)

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad a^2 &= 25, \quad a = 5 & \text{และ} \quad c^2 &= 25 - 9 \\ b^2 &= 9, \quad b = 3 & \text{และ} \quad c &= 4 \end{aligned}$$

จุดศูนย์กลาง คือ (-3, -4)

จุดยอด คือ V(-3, -4±5) หรือ (-3, 1) และ (-3, -9)

และ โฟกัส คือ F(-3, -4±4) หรือ (-3, 0) และ (-3, -8)

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนกราฟและหาส่วนต่าง ๆ ของวงรีที่มีสมการเป็น

$$9(x - 2)^2 + 25(y + 1)^2 = 225$$

วิธีทำ จากสมการ $9(x - 2)^2 + 25(y + 1)^2 = 225$ นำ 225 ทหารตลอด

$$\text{จะได้ว่า } \frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$$

จะเห็นว่า แกนเอก ขนานกับแกน X (เลขใต้แกน X มากกว่า)

$$\text{เปรียบเทียบกับสมการ } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{จะได้ } a^2 = 25 \text{ และ } b^2 = 9 \\ a = 5 \text{ และ } b = 3$$

$$\text{และ } c^2 = 25 - 9 \\ c = 4$$

1. สมการแกนเอก คือ $y + 1 = 0$ หรือ $y = -1$

สมการแกนโท คือ $x - 2 = 0$ หรือ $x = 2$

2. จุดศูนย์กลาง คือ C (2, -1)

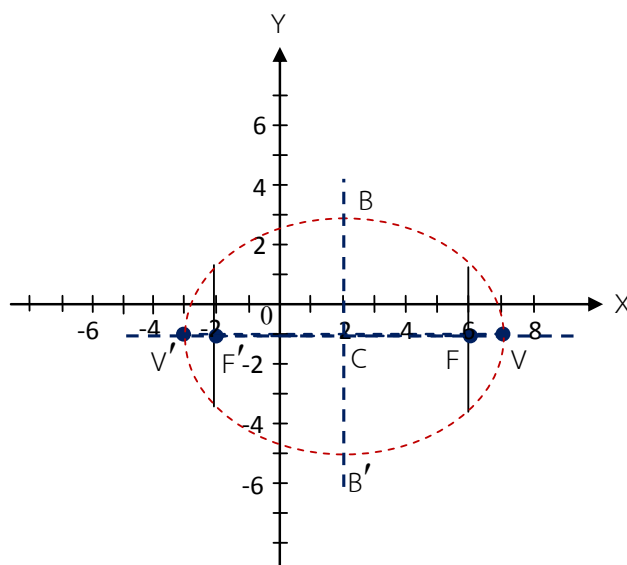
3. จุดยอด คือ V (7, -1) และ V' (-3, -1)

4. จุดโฟกัส คือ F (6, -1) และ F' (-2, -1)

$$5. \text{Latus Rectum} = L.R = \frac{2b^2}{a} = \frac{18}{5}$$

$$6. \text{ความเยื้องศูนย์กลาง คือ } e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

จะวาดกราฟได้ดังนี้



ข้อสรุปความรู้เกี่ยวกับ “ การหาส่วนประกอบของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ”

.....

.....

.....

.....

.....



บรรณานุกรม

- กนกวลี อุษณกรกุล. (2553). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2**. กรุงเทพมหานคร. เดอะบุคส์.
- เจริญ ภูภัทรพงศ์. **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2**. กรุงเทพมหานคร. SCIENCE CENTER.
- ถนอมวรรณ ประเสริฐเจริญสุข. (2543). **รูปแบบการสอนแบบร่วมมือกันเรียนรู้ (Cooperative Learning Model)**. ขอนแก่น : มหาวิทยาลัยขอนแก่น.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. **แบบฝึกคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4**. กรุงเทพมหานคร. แม็ค.
- วัฒนาพร ระงับทุกข์. (2541). **การจัดการเรียนการสอนที่เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลาง**. กรุงเทพมหานคร. ตันอ 1999.
- บุญชม ศรีสะอาด. (2541). **วิธีการทางสถิติสำหรับการวิจัย เล่ม 1**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : สุวีริยาสาส์น.
- _____. (2541). **การวิจัยเบื้องต้น**. กรุงเทพมหานคร : สุวีริยาสาส์น. วัฒนาพร ระงับทุกข์. (2541). **การจัดการเรียนการสอนที่เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลาง**. กรุงเทพมหานคร : ตันอ 1999.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2547). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2551). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ม.4**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ สกสค.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **Mathematics Problems โจทย์คณิตศาสตร์ ม. 4-5-6**. กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง จำกัด.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2553). **แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการคิด ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษา**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- อำรุง จันทวานิช. (2543). **ปฏิรูปการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญที่สุด**. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร : คุรุสภาลาดพร้าว.



ความรู้พื้นฐานของวงรี

Student Team - Achievement Division